Ing. Alberto Covarrubias P.

Nomogramas de puntos alineados

Introducción

Generalidades.—Sistemas de coordenadas.—Dualidad de figuras.—Transformación nomográfica.—Representación gráfica de funciones.—Separación de variables.—Soportes de las variables.—Escalas de las variables.—Puntos comunes.—Partes útiles de los soportes.—Nomograma de una función.

Teoría de los nomogramas de puntos alineados

Generalidades.—Planteamiento del Problema.—Análisis del determinante D.—Formas canónicas de las funciones.—Grado analítico del soporte de cada variable.—Puntos comunes de los soportes.—Partes útiles de los soportes.—Formas posibles del nomograma.—Graduación de las escalas.—Construcción del nomograma de una función.—Ejemplos.

Introducción

Generalidades.—La aplicación de las matemáticas a los problemas reales lleva envuelta, en último término, la solución de un problema numérico.

Se han buscado diversos procedimientos para facilitar la solución de dichos problemas convirtiéndolos en un trabajo mecánico, ya sea por medio del uso de máquinas de calcular o tablas numéricas, o bien por medio de construcciones gráficas.

Al estudiar, en general, las construcciones gráficas aplicables a la solución de problemas numéricos, se encuentran dos procedimientos generales, a saber: construcciones que sirven para la solución de un caso particular, y por lo tanto deben ejecutarse al resolver cada problema, y construcciones generales que abarcan grupos de problemas y por medio de las cuales, conocidos los datos del problema, pueden determinarse las incógnitas, utilizando la construcción ya hecha sin necesidad de nuevos trazados.

Las primeras son del dominio del cálculo gráfico y las segundas de la nomografía. Es la nomografía, por lo tanto, la ciencia que estudia la manera de interpretar gráficamente las fórmulas algebráicas en su forma general.

El estudio de esta ciencia ha preocupado a diversos sabios, habiendo sido M. D'Ocagne el primero que ha formado un cuerpo de doctrina, más o menos completo, sobre la materia.

Los estudios publicados hasta la fecha tratan de la solución de diferentes tipos de nomogramas y dan un esbozo de teoría general que no permite resolver la construcción de ellos sino dentro de ciertos tipos de ecuaciones. Sin pretender establecer la teoría general de los nomogramas, por cuanto hay lagunas que llenar, el presente trabajo es una contribución al estudio, en su forma general, de los nomogramas de puntos alineados y al mismo tiempo es una recopilación de los estudios hechos, basándose en las publicaciones de M. D'Ocagne y Saureau, para profesar durante algunos años la clase de Nomografía en el Curso de Ingeniería de la Universidad Católica de Santiago.

Antes de entrar al estudio propiamente tal, es necesario hacer mención de algunas nociones matemáticas que, si bien son del conocimiento del ingeniero, como no son de aplicación corriente conviene refrescar para un mejor entendimiento de la materia.

Sistemas de coordenadas.—En general un sistema de coordenadas es un sistema convencional de referencias que permite definir la posición de cada punto del espacio en forma inconfundible.

Según los elementos que se utilizan para definir la posición del punto, el sistema de coordenadas será cartesiano, polar, tangencial, etc.

En este caso es interesante estudiar la relación que existe entre los sistemas de coordenadas cartesianas y tangenciales.

Si en una ecuación de la forma $u\,x + v\,y + w\,t = 0$, x, y, t son coordenadas cartesianas homogéneas, es evidente que la ecuación para valores determinados de u, v y w representa una recta del plano de las X Y, o sea, es una ecuación puntual de una recta, por cuanto esta recta está definida por una serie de puntos que se encuentran sobre ella y cuyas coordenadas satisfacen la ecuación.

Por otra parte, cada sistema de valores de u, v y w define una recta determinada del plano y, por lo tanto, u, v y w pueden considerarse como coordenadas de la recta. Si se considera x y t como constantes, la ecuación representa todas las rectas que pasan por el punto, o sea es la ecuación, tangencial del punto.

En general, una ecuación entre x y t define una serie de puntos que se encuentran sobre una línea o sea, es la ecuación puntual de la línea. Análogamente una relación entre u, v y w define una serie de rectas que son envolventes de una línea, o sea, es la ecuación tangencial de la línea.

Si en la ecuación anterior se considera tres sistemas de valores de u, v y w tales como $a_1\,b_1\,c_1$, $a_2\,b_2\,c_2$, $a_3\,b_3\,c_3$, cada sistema corresponderá a una recta definida del plano y la condición de concurrencia de estas rectas será:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

Si en la misma ecuación se consideran tres sistemas $a_1\,b_1\,c_1$, $a_2\,b_2\,c_2$ y $a_3\,b_3\,c_3$ de x y t, la condición de alineamiento de los tres puntos será la misma anterior. O sea: si se considera las coordenadas como cartesianas o tangenciales de la misma expresión algebraica pueden deducirse dos interpretaciones geométricas diferentes.

Dualidad de figuras.—Las dos figuras que traducen la misma ecuación, una en el dominio puntual y la otra en el tangencial, se llaman figuras correlativas. Toda relación geométrica que es capaz de expresarse algebraicamente en coordenadas cartesianas permite la construcción de su figura correlativa al interpretar la relación algebráica como formada por coordenadas tangenciales.

En esta correspondencia de figuras consiste el principio de la dualidad de figuras. Este principio tiene ancho campo de aplicación en el estudio de las transformaciones de figuras, pero en el campo de la nomografía sólo interesa dejar establecida la posibilidad que, existiendo una figura compuesta de rectas es posible substituirla por una figura compuesta de puntos de manera que a tres rectas concurrentes de la primera correspondan tres puntos alineados de la segunda.

Por medio de un estudio analítico se puede establecer cuál es el sistema de coordenadas tangenciales más conveniente para construir la figura correlativa. Se llega a un sistema de dos ejes paralelos cuyos orígenes se encuentran sobre una recta dada. Este sistema de coordenadas también se llama de coordenadas paralelas.

En este caso una recta queda definida por sus dos coordenadas, o sea, por los segmentos que corta sobre ambos ejes; un punto definido por una ecuación de primer grado se fija por la concurrencia de las rectas que se cortan sobre él. Si se toma la ecuación $au+bv+cw=o$

se tiene haciendo $\frac{u}{w}=o\,,\quad \frac{v}{w}=-\frac{c}{b}$

y haciendo $\frac{v}{w}=o\,,\quad \frac{u}{w}=-\frac{c}{a}$

luego, llevando sobre los ejes U y V las longitudes $-\frac{c}{a}$ y $-\frac{c}{b}$ y uniendo estos puntos con los orígenes de los ejes, se tienen dos rectas que se cortan sobre el punto definido por la ecuación

$$au+bv+cw=o$$

Cuando se trata de construir una serie de puntos, muchas veces es más cómodo substituir la ecuación en coordenadas paralelas por las coordenadas cartesianas del punto respecto de un sistema de ejes que se fija de manera que el eje de las X sea la línea de orígenes de los ejes U y V y que el de las Y sea la paralela equidistante a estos ejes. Es fácil determinar la relación que existe entre las coordenadas del punto y su ecuación, y se llega a que

$$x=-\delta(a-b)$$
$$y=-c$$
$$t=a+b$$

siendo δ la distancia según la línea de los orígenes de los ejes U y V.

Transformación nomográfica.—Si el determinante de tercer orden

$$\Delta=\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix}=0$$

en que $f_i\ g_i\ h_i$ son funciones de una variable α_i, se interpreta como formado por coeficientes de ecuaciones de primer grado, expresa la compatibilidad de ellas, o sea, en coordenadas cartesianas expresa la concurrencia de tres rectas y en coordenadas tangenciales el alineamiento de tres puntos.

Ahora bien, si este mismo determinante se considera como formado por valores de coordenadas, en coordenadas cartesianas expresa el alineamiento de tres puntos y en coordenadas tangenciales la concurrencia de tres rectas.

En otras palabras, si se interpreta el determinante como formado por coeficientes de ecuaciones en coordenadas cartesianas, o bien como formado por valores de coordenadas paralelas, expresa la concurrencia de tres rectas, y en el caso inverso el alineamiento de tres puntos. Las figuras de rectas o de puntos que se obtienen usando ambos sistemas de coordenadas son entre sí correlativas.

Ahora bien, si el determinante anterior se multiplica por otro de tercer orden y diferente de cero, se tiene:

$$\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f'_1 & g'_1 & h'_1 \\ f'_2 & g'_2 & h'_2 \\ f'_3 & g'_8 & h'_3 \end{vmatrix} = \Delta' = 0$$

siendo

$$\begin{aligned} f'_i &= l_1 f_i + m_1 g_i + n_1 h_i \\ g' &= l_2 f_i + m_2 g_i + n_2 h_i \\ h &= l_3 f_i + m_3 g_i + n_3 h_i \end{aligned}$$

Para cada sistema de valores de l m n que haga $D = \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} \neq 0$

la figura que representa el nuevo determinante $\Delta' = 0$ es una transformación nomográfica de la figura correspondiente a $\Delta = 0$. Como los valores de l m n son arbitrarios, el determinante Δ' representa cualquier transformación nomográfica de Δ, o sea, es la transformación más general.

Se puede demostrar fácilmente que si se interpreta Δ en coordenadas paralelas como formado por coeficientes de ecuaciones y Δ' en coordenadas cartesianas como formado por coordenadas de puntos, se puede hacer coincidir ambas figuras.

En efecto, en el primer caso se tiene:

$$\begin{aligned} x\alpha_i &= -\delta (f - g) \\ y\alpha_i &= -h_i \\ t\alpha_i &= f_i + g_i \end{aligned}$$

y en el segundo caso:

$$\begin{aligned} x'\alpha_i &= l_1 f_i + m_1 g_i + n_1 h_i \\ y\alpha_i &= l_2 f_i + m_2 g_i + n_2 h_i \\ t\alpha_i &= l_3 f_i + m_3 g_i + n_3 h_i \end{aligned}$$

Si se da los valores

$$\begin{matrix} l_1 = -\delta & m_1 = \delta & n_1 = 0 \\ l_2 = 0 & m_2 = 0 & n_2 = -1 \\ l_3 = 1 & m_3 = 1 & n_3 = 0 \end{matrix}$$

se tiene:

$$\begin{aligned} x\alpha_i &= x'\alpha_i \\ y\alpha_i &= y'\alpha_i \\ t\alpha_i &= t'\alpha_i \end{aligned}$$

Siendo $= D \ 2\delta \neq 0$.

Representación gráfica de funciones.—Si un punto del plano queda fijo por 2 condiciones, su posición sólo puede depender de 2 variables independientes y, por consiguiente, una línea del plano es la interpretación gráfica de una función de 2 variables, función que se satisface con los valores de las variables correspondientes a los distintos puntos de la línea.

Cuando la función que se quiere representar tiene más de dos variables, es necesario considerar sólo dos y darle un valor determinado a las demás para poder tener una representación gráfica de la función. Si la función tiene tres variables, a cada valor de la tercera variable corresponderá una línea representativa de la función y el conjunto de esas líneas será la familia de curvas representativa de la función de tres variables. Para obtener la representación de una función de más de tres variables, hay que recurrir a subterfugios que permitan substituir la función primitiva por funciones de tres variables, cada una de las cuales puede tener su representación gráfica y el conjunto de ellas será la representación gráfica de la función.

Realizada la representación gráfica de una función de tres variables, en la cual cada coordenada es función de una sola variable, las paralelas a cada eje coordenadas serán las líneas representativas de la variable de que depende la otra coordenada; por consiguiente, cada variable está representada por una familia de líneas y los valores de las variables que satisfacen conjuntamente la función serán los que corresponden a las líneas que concurren en un mismo punto.

Si las líneas correspondientes a la tercera variable tambien son rectas, el principio de dualidad de figuras permite asegurar que la figura obtenida puede sustituirse por otra en que a cada familia de líneas corresponda una familia de puntos y en la cual a cada punto de la primera figura corresponde una recta, y por lo tanto los valores de las variables que satisfacen la función se colocaran sobre la recta correspondiente al punto de la primera figura.

Separación de variables.—Si se refiere la figura obtenida a un sistema de coordenadas cartesianas cualesquiera, es evidente que la familia de rectas correspondiente a una de las variables tendrá una ecuación de la forma.

$$x f_i + y g_i + t h_i = 0$$

siendo f_i g_i h_i funciones de la variable α_i.

Para establecer la concurrencia de las rectas correspondientes a las tres variables se tiene:

$$D = \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix} = 0$$

o sea, que si la función primitiva es

$$F(\alpha_1 \; \alpha_2 \; \alpha_3) = 0$$

se tiene

$$F(\alpha_1 \; \alpha_2 \; \alpha_3) \equiv D = 0$$

La transformación de la función F en el determinante D es lo que se llama separación de variables.

Para que una función permita la separación de variables es necesario que pueda tomar la forma del determinante desarrollado, o sea, que se pueda tener

$$F(\alpha_1 \; \alpha_2 \; \alpha_3) = f_1 (g_2 h_3 - g_3 h_2) + f_2 (g_3 h_1 - g_1 h_3) + f_3 (g_1 h_2 - g_2 h_1) = 0$$

o dividiendo por h_1 h_2 h_3

$$F(\alpha_1 \; \alpha_2 \; \alpha_3) = F_1(G_2 - G_3) + F_2 (G_3 - G_1 + F_3 (G_1 - G_2) = 0$$

El estudio de las condiciones analíticas y diferenciales que debe satisfacer una función para permitir la separación de variables ha permitido obtener una solución diferencial completa del problema. Esta solución tiene un gran interés científico, pero es de poca aplicación en la práctica, por lo que la he dejado fuera de este estudio.

Soporte de las variables.—Se ha visto que el determinante D = 0 se puede interpretar como formado por coordenadas cartesianas de puntos, de manera que para un valor determinado de la variable α_i se tiene como coordenadas

$$X_{\alpha_i} = \frac{f_i}{h_i} \qquad Y_{\alpha_i} = \frac{g_i}{h_i}$$

Si se unen entre sí todos los puntos correspondientes a los diversos valores de la variable, se tiene una línea que se llama soporte de la variable.

Es evidente que si se elimina α entre X e Y se obtiene la ecuación del soporte. Para que esta ecuación sea de primer grado es necesario que se realice la condición

$$pf + qg + rh = 0$$

en que p, q y r son constantes arbitrarias de las cuales, una por lo menos, debe ser diferente de cero.

Para que se realice esta condición es necesario que exista una función de la variable que permita expresar f g y h en función de ella, o sea, que se tenga

$$f = a\,A + b$$
$$g = c\,A + d$$
$$h = e\,A + k$$

porque la expresión

$$pf + qg + rh = 0$$

se transforma en

$$(pa + qc + er)\,A + (pb + qd + rk) = 0$$

que se satisface para cualquier valor de A si se hace

$$p = \frac{ed - kc}{bc + ad}$$

$$q = \frac{ak - bc}{bc - ad}$$

Si se divide por h se tiene

$$F = \frac{a\,A + b}{e\,A + k} = B + \lambda$$

$$G = \frac{c\,A + b}{e\,A + k} = B + \mu$$

Escalas de las variables.—Si se acota los puntos del soporte con los valores correspondientes de la variable, se obtiene la escala de dicha variable. Una transformación nomográfica de ella, significa el cambio de su forma, dentro de su grado analítico y al mismo tiempo una variación de las distancias entre sí de los puntos, o sea: es posible mejorar la graduación de la escala por medio de una transformación nomográfica adecuada.

Puntos comunes.—Si se tiene valores de dos de las variables que dan las mismas coordenadas, los soportes correspondientes tienen un punto común. Estos valores de las variables deben ser tales que hacen indeterminado el valor de la tercera variable, o sea, en ese caso, se tiene dos líneas proporcionales del determinante, lo que expresado analíticamente da

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{g_1}{g_2} = \frac{h_1}{h_2}$$

En la generalidad de los casos los soportes sólo tienen un punto común, por lo cual, o bien los puntos comunes coinciden y los tres soportes son concurrentes, o no coinciden y los soportes forman un triángulo curvo o recto, según sean líneas curvas o rectas.

Partes útiles de los soportes.—La aplicación práctica de una relación analítica entre variables se hace dentro de ciertos límites de estas variables, por consiguiente cuando se trata de construir el nomograma de una función se tiene como datos

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & < & \alpha_1 & < & b_1 \\ a_2 & < & \alpha_2 & < & b_2 \\ a_3 & < & \alpha_3 & < & b_3 \end{array}$$

por consiguiente, las partes útiles de los soportes estarán entre los puntos correspondientes a los valores

$$\alpha_0 = a \quad y \quad \alpha_1 = b$$

que podrán estar al mismo lado o a distinto lado de cada punto común con los otros soportes.

Nomograma de una función.—La representación gráfica de una función se puede hacer según los casos por líneas o puntos correspondientes a cada variable. En el primer caso se llama nomograma de líneas concurrentes, y en el segundo nomograma de puntos alineados de la función.

Teoría de los nomogramas de puntos alineados

Generalidades.—La manera corriente de estudiar un nomograma de puntos alineados de una función es tratar de construir el que le corresponde al determinante que se obtiene al hacer la preparación de variables de la función, y cuando los valores entre los que oscilan las variables hacen que la graduación de la escala de alguna de ellas no dé la aproximación suficiente, no se ve la forma clara de proceder para mejorar la exactitud del nomograma.

Sin embargo, si una función permite hacerle la separación de variables por un procedimiento cualquiera y el determinante que se obtiene se interpreta como formado por coordenadas cartesianas de puntos, por medio de un análisis de dicho determinante se puede llegar a obtener el mejor nomograma de la función, sin necesidad de conocer de antemano el tipo de nomograma que le corresponde.

Cuando una función tiene más de tres variables, su nomograma es la combinación de dos o más, de sólo tres variables, por consiguiente el estudio del nomograma de una función de tres variables es la base para la construcción del nomograma de toda función, cualquiera que sea el número de 'variables.

Planteamiento del problema.—Si se tiene que usar constantemente una función de tres variables para determinar el valor de una de ellas, cuando se conocen las otras dos, es práctico disponer de un nomograma de dicha función en el que, uniendo los valores de las variables conocidas, se obtiene el de la tercera.

Por el uso mismo de la función se sabe que las variables oscilan entre ciertos valores que se necesitan con un grado de aproximación conocida.

La expresión analítica de los datos de que se dispone es:

$$F\,(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) = 0$$

$$a_i < \alpha_i < b_i$$

siendo α_i cualquiera de las variables.

Si se supone construído un nomograma de puntos alineados y se expresa analíticamente la posición de los puntos correspondientes a cada una de las variables se tiene:

$$X\alpha_i = F_i$$

$$Y\alpha_i = G_i$$

y la expresión del alineamiento de los puntos que satisfacen la función, expresada en un determinante da

$$D = \begin{vmatrix} F_1 & G_1 & 1 \\ F_2 & G_2 & 1 \\ F_3 & G_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

de donde se deduce que debe tenerse

$$D \equiv F\,(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) = 0$$

o sea, que si una función es suceptible de expresarse por un determinante de tercer orden, en que cada línea sea función de una sola de las variables, es posible construir para esa función un nomograma de puntos alineados, interpretando este determinante como formado por coordenadas cartesianas de puntos.

La expresión analítica de todos los nomogramas de puntos alineados de la función, que son transformados nomográficos del representado por el determinante D, se obtiene multiplicándolo por un determinante de tercer orden formado por constantes arbitrarias. Este determinante D'' sólo tiene que cumplir con la condición que su valor sea diferente de cero. Si se elige en forma conveniente los valores de las constantes arbitrarias, el determinante resultante será la expresión del nomograma de puntos alineados más conveniente que se puede construir de la función primitiva.

Para llegar a determinar los valores más convenientes de las constantes arbitrarias, se puede hacer un estudio de las características de la función por medio de un análisis del determinante D.

Análisis del determinante D.—Tiene por objeto poner de manifiesto las características de los términos del determinante y aclarar las relaciones que existen entre ellos, para que las condiciones que se imponga a las constantes arbitrarias sean compatibles con los límites en que deben oscilar las variables. En otras palabras, se trata de encontrar la forma esquemática del nomograma por la determinación de la naturaleza de los soportes de cada variable y por la ubicación de sus puntos comunes en relación con las partes útiles. Lo que permite estudiar las graduaciones posibles de las diversas escalas para obtener la aproximación que se necesita.

El análisis del determinante D permite establecer:

a) Las formas comunes de las ecuaciones que corresponden a los diferentes tipos de nomogramas.

b) La naturaleza o el grado analítico de los soportes de cada variable.

c) Los puntos comunes de dichos soportes.

d) Las partes útiles de dichos soportes.

e) Las graduaciones posibles de las escalas de las variables.

f) Formas posibles del nomograma.

g) Los valores que se puede dar a las constantes arbitrarias, teniendo en cuenta los resultados obtenidos anteriormente.

Formas canónicas de las funciones.—Reciben este nombre las relaciones entre tres variables que, por su forma, permiten de antemano decir el tipo de nomograma que las representa. Esto tiene interés en cuanto a la clasificación de los nomogramas, pero siguiendo el sistema general de este estudio no hay por qué preocuparse de la forma de la ecuación que relaciona las variables, salvo en cuanto a que facilita la obtención del determinante D.

Si se desarrolla este determinante se llega a la conclusión que la ecuación más general se debe poder llevar a la forma

$$F_1\,(G_2 - G_3) + G_1\,(F_2 - F_3) + F_2\,G_3 - G_2\,F_3 = 0$$

cuando uno de los soportes es recto la ecuación puede reducirse a

$$F_1 = \frac{F_2\,G_3 - F_3\,G_2}{G_2 - G_3}$$

o sea, si se pueden separar los términos que dependen de una variable, ésta tiene soporte recto.

Si hay dos soportes rectos la ecuación se reduce a $F_1 = \dfrac{F_2\,F_3}{F_2 - G_3}$

y cuando los tres soportes son rectos la ecuación se puede reducir a

$$F_1 = F_2\,F_3$$

$$F_1 = F_2 + F_3$$

Grado analítico del soporte de cada variable.—Se ha visto que la eliminación de la variable entre los valores de sus coordenadas permite determinar la ecuación de su soporte. Al hacer la transformación nomográfica puede cambiarse la forma de la curva correspondiente, pero se mantiene el grado de la ecuación, o sea: si se tiene, por ejemplo, que la ecuación del soporte correspondiente a una curva de 20 grados, podrá construirse nomogramas de la función en que este soporte sea cualquier curva de segundo grado.

Puntos comunes de los soportes.—Corresponde a los pares de valores de dos variables, que hacen indeterminado el valor de la tercera, o sea, cuando las dos líneas del determinante toman el mismo valor, o sea:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{G_1}{G_2} = \frac{1}{1}$$

de donde:

$$F_1'' = F_2' \qquad G_1'' = G_2'$$
$$F_1''' = F_2' \qquad G_1''' = G_3'$$
$$F_2''' = F_3'' \qquad G_2''' = G_2''$$

De los valores anteriores se deduce que pueden presentarse dos casos

$$F_1'' \neq F_1''' \qquad F_2' \neq F_2''' \qquad F_3' \neq F_3'''$$
$$G_1'' \neq G_1''' \qquad G_2' \neq G_2''' \qquad G_3' \neq G_3'''$$

o bien

$$F_1'' = F_1''' \qquad F_2' = F_2''' \qquad F_3' = F_3''$$
$$G_1'' = G_1''' \qquad G_2' = G_2''' \qquad G_3' = G_3''$$

en el primer caso los soportes forman un triángulo y en el segundo son concurrentes.

Partes útiles de los soportes.—Conocidos los valores de las variables que corresponden a los puntos comunes se sabe inmediatamente, por los límites que se ha fijado a cada una, dónde se ubica la parte útil de su soporte con relación a los puntos comunes con las otras variables.

Se pueden presentar los siguientes casos:

a) Los soportes son concurrentes. Las partes útiles de las escalas no pasan por el punto común.

b) Los soportes son concurrentes. La parte útil de alguna de las escalas pasa por el punto común.

c) Los soportes forman un triángulo. Las partes útiles de las escalas no pasan por ningún punto común.

d) Los soportes forman triángulo. La parte útil de alguna escala pasa por un punto común.

Formas posibles del nomograma.—Con los datos obtenidos del análisis del determinante se puede construir la figura esquemática del nomograma, la que permite determinar en cada caso sus formas posibles dentro de las características de la función.

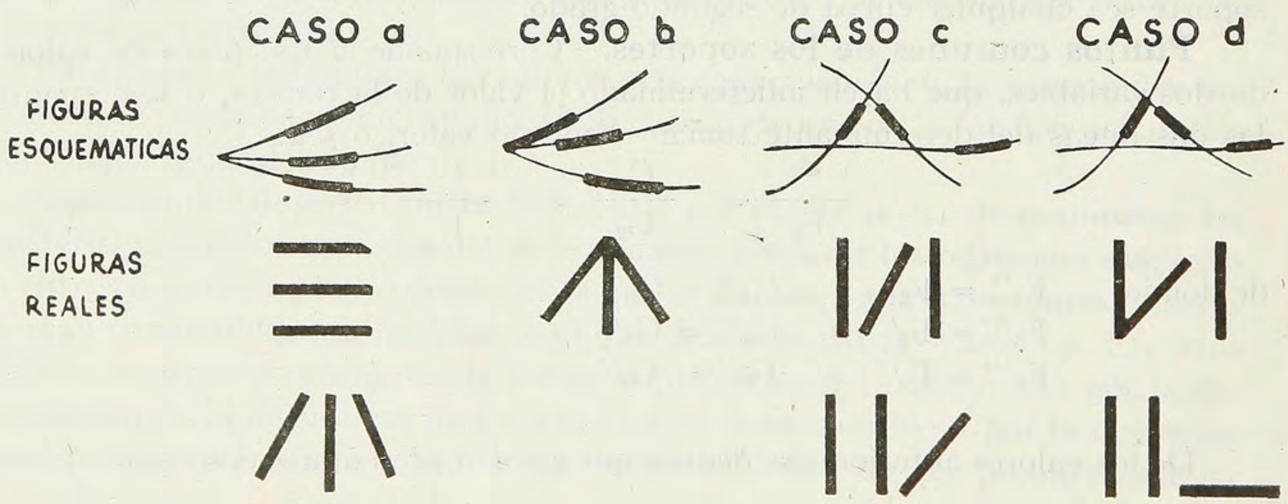
Caso a.—Si las escalas son rectas, podrá colocarse paralelas, siempre que la graduación de ellas resulte satisfactoria. Si son curvas, los puntos extremos de las escalas pueden formar un rectángulo.

Caso b.—En este caso se tendrá siempre las escalas concurrentes y sólo se podrá hacer variar el ángulo que forman.

Caso c.—Hay la posibilidad de hacer dos escalas paralelas y la tercera formando un ángulo. Podrán hacerse paralelas aquellas escalas cuya graduación convenga que sea regular.

Caso d.—Hay también la posibilidad de hacer paralelas las escalas cuyo punto común queda fuera del nomograma.

En todo caso, la observación de la figura esquemática del nomograma da indicaciones claras de las formas posibles del nomograma.



Graduación de las escalas de las variables.—La figura esquemática del nomograma que representa al determinante D permite saber si este nomograma es satisfactorio o necesita modificarse. En caso que aparezca satisfactorio bastará dibujar dicho nomograma a una escala adecuada, ya que para cada variable se tiene

$$X\alpha = F\alpha \qquad Y\alpha = G_x$$

lo que permite construir la escala correspondiente a cada variable.

La representación gráfica del determinante D puede no ser satisfactoria, o bien porque la parte útil de una de las variables queda fuera del dibujo, o porque la graduación de alguna de las escalas no es satisfactoria. En ambos casos hay que hacer una transformación nomográfica que permita traer dentro del dibujo la parte útil de la escala o bien que permita mejorar la graduación de la escala defectuosa.

La figura esquemática que se deduce del determinante D, permite sacar algunas conclusiones que deben tomarse en cuenta al estudiar la graduación de las escalas. Desde luego, indica los puntos comunes de ellas que deben quedar dentro del dibujo y, por lo tanto, las formas posibles del nomograma. Por lo cual es conveniente partir de dicha figura y establecer como condición previa la posición de los puntos comunes, lo que impone ciertas condiciones sobre las constantes arbitrarias o, en otros términos, disminuye el número de ellas. Por otra parte, generalmente hay una o dos escalas a las que convendría darle una graduación regular, lo que también reduce el número de constantes arbitrarias.

Un procedimiento fácil para estudiar la graduación de una escala determinada consiste en dibujar a grandes rasgos, en forma independiente, la escala que da el determinante D y estudiar su modificación por el cambio de algunos puntos de ella, con lo cual se pueden fijar los valores de las constantes arbitrarias que entran en los valores de sus coordenadas cuando esta escala se lleva a la posición que se deduce de las otras condiciones que se ha impuesto anteriormente. Con unos pocos tanteos se llega a la escala más conveniente.

En el caso que la escala sea recta, si se fija la posición de sus puntos extremos, al fijar otro punto de ella se la deja completamente definida. Si se considera la escala como coincidiendo con un eje de coordenadas, se tiene

$$X_\alpha = \frac{l_1 F_1 + n_1}{l_3 F_3 + n_3}$$

si se da valores a x_a, x_b, x_c, siendo a y b los valores extremos de α y c un valor intermedio, se tiene tres ecuaciones de condiciones que permiten determinar las constantes arbitrarias, con lo que queda definida la posición de cualquier punto de la escala.

Construcción del nomograma de una función.—De lo expuesto anteriormente se deduce que cuando se quiere construir el nomograma de una función

$$F(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3) = 0$$

cuyas variables tienen los límites

$$a_i < \alpha_i < b_i$$

se procede de la siguiente manera:

Se principia por establecer la separación de variables y formar el determinante D. Una manera corriente de hacer la separación de variables es establecer una ecuación de primer grado en u y las funciones de una variable; una segunda ecuación de primer grado en v y de las funciones de la segunda variable, de manera que eliminando las dos variables en la función primitiva resulte para la tercera una ecuación de primer grado en u y v y las funciones de la tercera variable. El determinante formado por los coeficientes de estas ecuaciones, cuyo desarrollo da la función primitiva, es el determinante D.

Al dividir por los valores de una columna se tiene que el determinante toma la forma

$$D = \begin{vmatrix} F_1 & G_1 & 1 \\ F_2 & G_2 & 1 \\ F_3 & G_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Interpretado este determinante como formado por coordenadas de puntos, permite determinar los puntos comunes de las variables, con lo cual se puede hacer una figura esquemática del nomograma en la cual se puede indicar la parte útil de cada escala. Esta figura permite, una vez conocida la naturaleza de las escalas, determinar las formas posibles del nomograma.

Por otra parte, el estudio de la graduación de las diversas escalas permite establecer si el determinante D da graduaciones convenientes y si estas graduaciones quedan con sus partes útiles dentro del dibujo. En tal caso basta con dibujar el nomograma correspondiente y no hay necesidad de hacer mayores estudios. Pero si alguna de las variables necesita una alteración de su escala, se hace el estudio de dicha modificación por un procedimiento gráfico o analítico hasta obtener la escala conveniente, lo que significa en la práctica haber multiplicado el determinante por otro de constantes arbitrarias, por lo cual al fijar la nueva escala de la variable debe comprobarse que los valores fijados para dichas constantes arbitrarias dan un determinante diferente de cero y, al mismo tiempo, si sus valores permiten que las otras variables tengan escalas satisfactorias.

Debe tenerse en cuenta al estudiar la modificación de la escala de una variable que, cuando es recta, sólo fija los puntos comunes con las otras escalas, pero que cuando es curva su alteración puede llegar hasta determinar completamente las otras escalas, por lo cual es preferible principiar por fijar las condiciones mínimas que deben satisfacer las otras escalas que no se quieren modificar para determinar qué constantes arbitrarias se pueden dejar variables para la transformación de la escala que se quiera modificar.

Estudiada la forma conveniente para las escalas de las tres variables, se ha determinado en el hecho todas las constantes arbitrarias, con cuyos valores se puede escribir el determinante resultante. Este determinante desarrollado da la función primitiva. Lo que debe comprobarse antes de construir el nomograma.

La representación gráfica de dicho determinante es entonces el nomograma más conveniente que se ha podido realizar de la función.

Ejemplos.—Como una manera de aclarar lo expuesto anteriormente se puede hacer el estudio del nomograma de la función

$$F = \frac{f_1 \; f_2}{f_1 + f_2}$$

que da la relación entre la distancia focal principal F y las distancias focales conjugadas de una lente. Si en esta función se hace

1) $uf_1 = 1$; luego $f_1 = \dfrac{1}{u}$

2) $vf_2 = 1$; luego $f_2 = \dfrac{1}{v}$

resulta $$F = \frac{\dfrac{1}{uv}}{\dfrac{1}{v} + \dfrac{1}{u}} = \frac{\dfrac{1}{uv}}{\dfrac{u+v}{uv}} = \frac{1}{u+v}$$

3) $F(u + v) = 1$

La compatibilidad de estas ecuaciones se expresa por el determinante

$$D = \begin{vmatrix} f_1 & 0 & 1 \\ 0 & f_2 & 1 \\ F & F & 1 \end{vmatrix} = 0$$

que desarrollado da

$$F\,(f_1 + f_2) = f_1\,f_2 \quad \text{o sea} \quad F = \frac{f_1\,f_2}{f_1 + f_2}$$

que es la función primitiva.

La determinación del punto común entre f_1 y f_2 se hace con las relaciones

$$\frac{f_1''}{0} = \frac{0}{f_2'} = \frac{1}{1} \quad \text{que dan } f_1''=0;\ f_2'=0$$

El punto común entre f_1 y F se obtiene de

$$\frac{f_1'''}{F'} = \frac{0}{F'} = \frac{1}{1} \quad \text{relaciones que dan } f_1'''=0;\ F'=0$$

El punto común entre f_2 y F se obtiene de

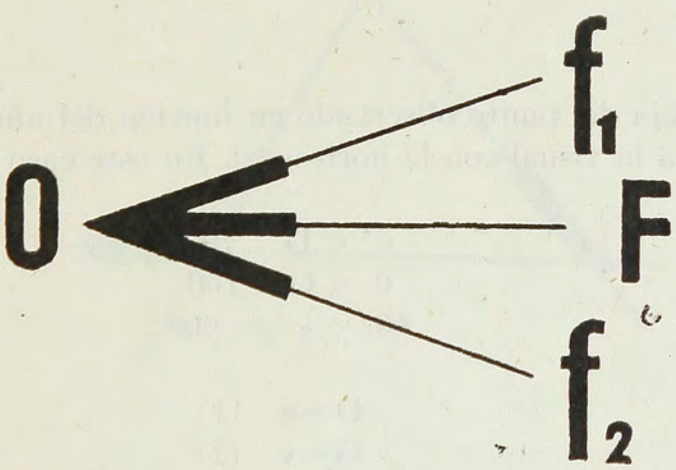
$$\frac{0}{F''} = \frac{f_2'''}{F''} = \frac{1}{1}$$

que da los valores $f_2''=0$; $F''=0$

o sea, que en este caso las escalas son concurrentes. Además, como sólo hay una función de cada variable, las escalas son rectas.

Si los límites de las variables son

$$0 < f_1 < 10$$
$$0 < f_2 < 10$$
$$0 < F < 5$$

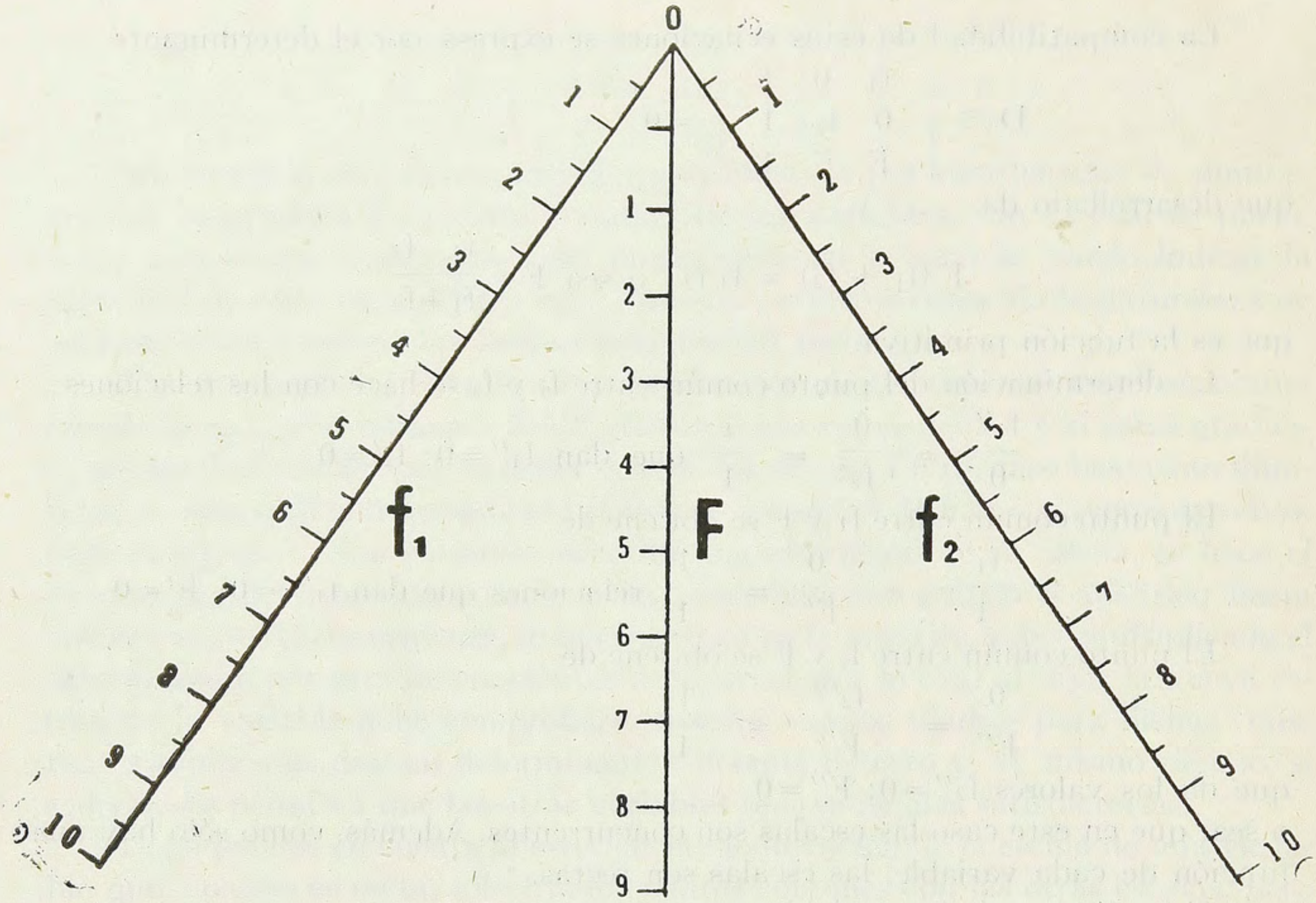


La figura esquemática de la función muestra que se puede construir un nomograma de rectas concurrentes y que el punto común debe quedar dentro del nomograma.

En cuanto a la graduación de las escalas, se ve que se puede hacer regular para todas ellas y, por consiguiente, se puede obtener un nomograma adecuado de la función representando gráficamente el determinante D, sin necesidad de recurrir a multiplicar por un determinante de constantes arbitrarias.

Un segundo caso que es interesante estudiar es la función

$$D = G\ \mathrm{sen}^2\alpha$$



$$F = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2}$$

que da la distancia del punto observado en función del número generador y del ángulo que forma la visual con la horizontal. En este caso los límites de las variables son

$$0 < D < 100$$
$$0 < G < 100$$
$$60^\circ < \alpha < 90^\circ$$

haciendo $D = u$ (1)

$G = v$ (2)

se obtiene $u = v \operatorname{sen}^2\alpha$ (3)

La compatibilidad de estas ecuaciones da el determinante

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -D \\ 0 & 1 & -G \\ 1 & -\operatorname{sen}^2\alpha & 0 \end{vmatrix} = 0$$

que desarrollado da

$$-D + G \operatorname{sen}^2\alpha = 0 \qquad D = G \operatorname{sen}^2\alpha$$

El punto común entre D y G se obtiene de $\frac{1}{0} = \frac{0}{1} = \frac{-D}{-G}$

que se puede transformar en $\frac{\frac{1}{D}}{0} = \frac{0}{\frac{1}{G}} = \frac{1}{1}$

que da $D'' = \infty \quad G' = \infty$

El punto común entre D y α se obtiene de

$$\frac{1}{1} = \frac{0}{-\text{sen}\,\alpha} = \frac{-D}{0}$$

que da $D''' = 0 \quad (\text{sen}\,\alpha)' = 0$

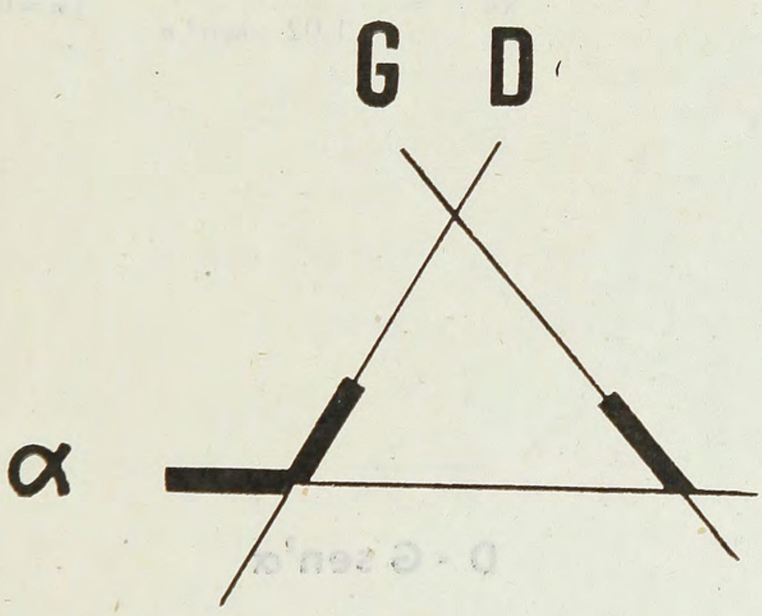
El punto común entre G y α se obtiene de

$$\frac{0}{1} = \frac{1}{-\text{sen}\,\alpha} = \frac{-G}{0}$$

que se puede transformar en

$$\frac{0}{\frac{-1}{\text{sen}\,\alpha}} = \frac{1}{1} = \frac{-G}{0}$$

que da $(\text{sen}\,\alpha)'' = \infty,\ G''' = 0.$



La figura esquemática de la función demuestra que no conviene hacer la representación gráfica del determinante D sin modificarlo porque las escalas de G y D, si bien tienen una graduación regular, tienen sus partes útiles fuera del dibujo, lo mismo que la escala de α.

En este caso es indispensable hacer una transformación nomográfica, tratando en lo posible de conservar la regularidad de las escalas de D y G. Al multiplicar por el determinante de constantes arbitrarias se tiene

$$D' = \begin{vmatrix} l_1 - n_1 D & l_2 - n_2 D & l_3 - n_3 D \\ m_1 - n_1 G & m_2 - n_2 G & m_3 - n_3 G \\ l_1 - m_1 \text{sen}^2 \alpha & l_2 - m_2 \text{sen}^2 \alpha & l_3 - m_3 \text{sen}^2 \alpha \end{vmatrix} = 0$$

En este determinante se ve que se puede anular dos valores de n sin alterar la escala de α, o sea, que se puede hacer que las escalas de D y G sean paralelas y que una de ellas coincida con un eje de coordenadas, por ejemplo D, con lo que se tiene

$$l_1 = 0 \qquad l_2 = 0$$
$$n_1 = 0 \qquad n_2 = 0$$

quedando para α

$$x\alpha = \frac{-\ m_1 \operatorname{sen}^2 \alpha}{l_3 - m_3 \operatorname{sen}^2 \alpha}$$

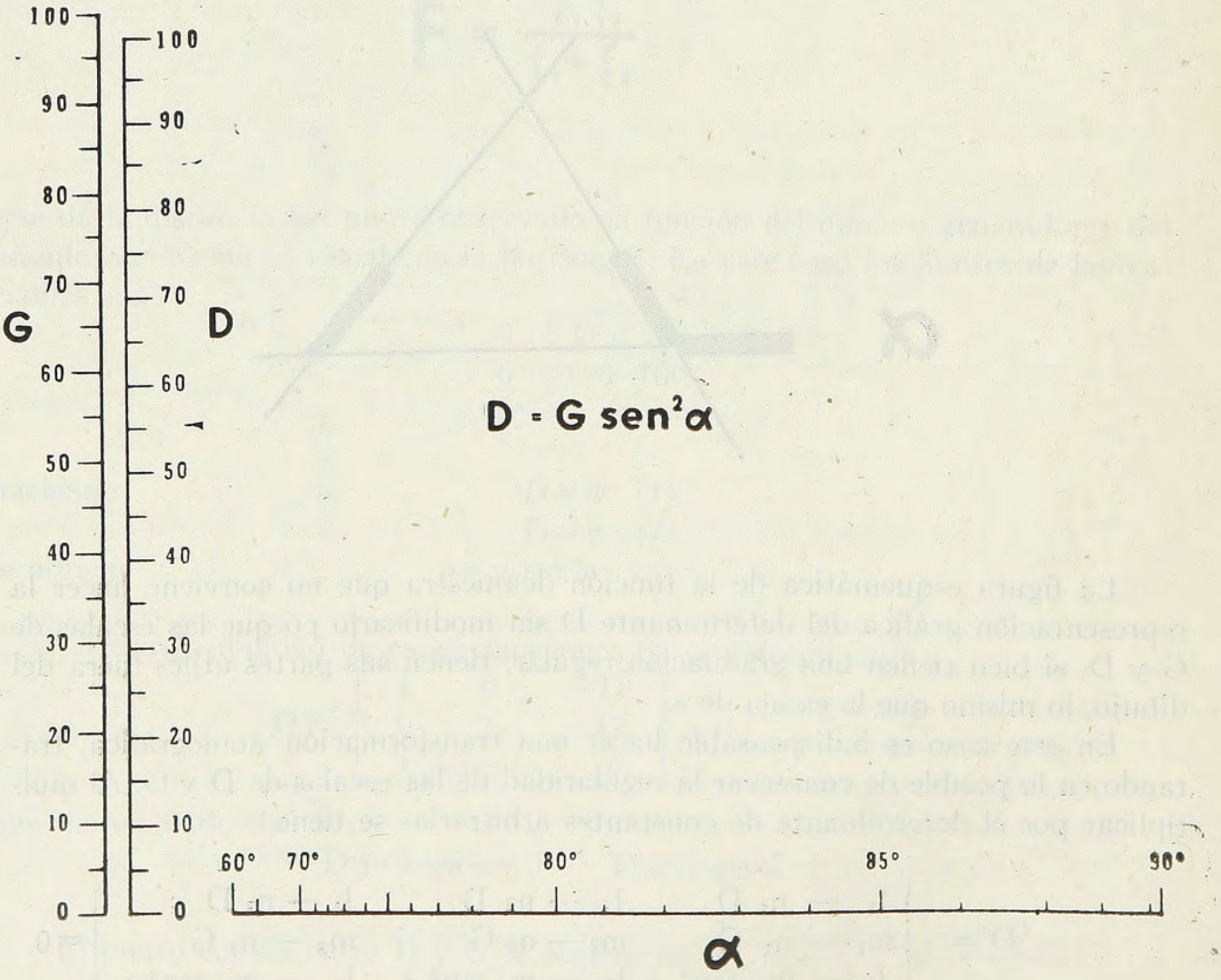
$$y\alpha = \frac{-\ m_2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{l_3 - m_3 \operatorname{sen}^2 \alpha}$$

Como el ángulo de los ejes de coordenadas no afecta al determinante, hacer coincidir la escala de α con el eje de las X no impone ninguna condición a la graduación de su escala. por consiguiente, se puede hacer $m_2 = 0$ y tener $y\alpha = 0$ con lo que queda para α

$$x\alpha = \frac{-\ m_1 \operatorname{sen}^2 \alpha}{l_3 - m_3 \operatorname{sen}^2 \alpha}$$

el análisis de esta expresión lleva a la conclusión que la escala más conveniente se obtiene si se hace

$$x\alpha = \frac{0{,}02 \operatorname{sen}^2 \alpha}{1{,}02 - \operatorname{sen}^2 \alpha} \qquad y\alpha = 0$$



lo que da

$$X_D = 0 \qquad Y_D = \frac{D}{1{,}02}$$

$$X_G = 0{,}02 \qquad Y_G = G$$

y el determinante final

$$D' = \begin{vmatrix} 0 & \dfrac{D}{1{,}02} & 1 \\ -0{,}02 & G & 1 \\ \dfrac{00.2\ \mathrm{sen}^2\,\alpha}{1{,}02-\mathrm{sen}^2\alpha} & O & 1 \end{vmatrix} = 0$$

que desarrollado da

$$\frac{D}{1{,}02}\ \frac{00{,}2\ \mathrm{sen}^2\ \alpha}{1{,}02-\mathrm{sen}^2\ \alpha} + \frac{0.02\ D}{1{,}02} - \frac{0{,}02\ \mathrm{sen}^2\ \alpha\ G}{1{,}02\ -\ \mathrm{sen}^2\ \alpha}$$

que se puede transformar en

$$\frac{0{,}02}{1{,}02-\mathrm{sen}^2\alpha}\left[\frac{D}{1{,}02}(\mathrm{sen}^2\alpha + 1{,}02 - \mathrm{sen}^2\alpha) - G\ \mathrm{sen}^2\alpha\right]$$

de donde se deduce $D - G\ \mathrm{sen}^2\alpha = 0$

A. C. P.