Determinación de la mejor forma de las columnas por el método de las variaciones.

Nota de don Alfredo Lagarrigue publicada en *los Anales de la Sociedad Científica de Bruselas.*

LA repartición más conveniente de la materia a lo largo de una columna es según M. Résal un problema que no ha sido resuelto (*Résal, Résistance de Materiaux, Chap. III, N.° 67*). Sin embargo es posible tratarlo con éxito aceptando las hipótesis corrientes de los ingenieros sobre las deformaciones de las piezas construídas con materiales homogéneos.

El primero que se ha ocupado de esta cuestión es Lagrange (*Oevres de Lagrange, T. II, page 125. Mémoire «Sur la Figure des Colonnes»*). El llega a la conclusión que las columnas llenas, en forma de cuerpos de revolución, deben ser cilíndricas para obtener con una cantidad de material determinada la pieza que resista el mayor peso posible.

Sin embargo dicha conclusión no es aceptable. En el hecho, los arquitectos y los constructores de máquinas acostumbran inflar hacia la parte central algunas piezas cuando están cargadas de punta.

* * *

Una columna o pieza cargada de punta, es decir: un sólido elástico cuyas ligazones le permiten sólo movimientos debidos a deformaciones, comprimidos por dos fuerzas iguales, de la misma línea de acción y cuyas secciones normales a dicha línea tienen en ella su centro de gravedad; está siempre en equilibrio elástico, pero según sea el peso que la cargue dicho equilibrio será estable o inestable.

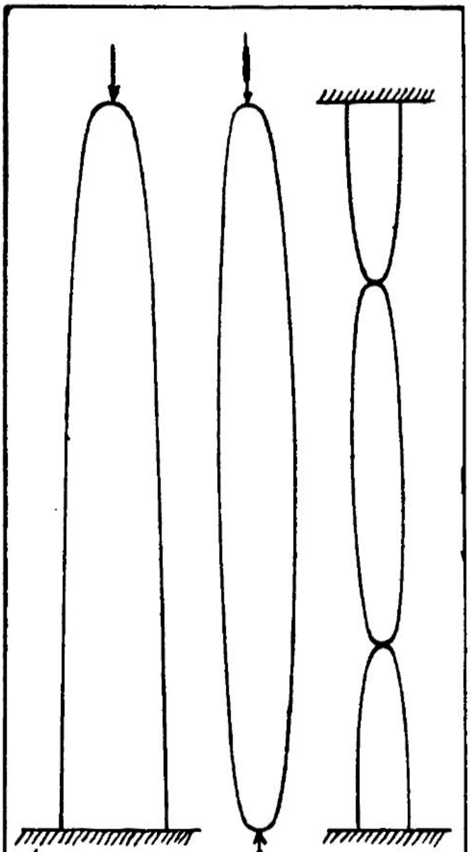
Nosotros llamaremos peso máximo P que puede resistir una columna la mayor fuerza a que puedan estar sometida en condiciones de equilibrio estable.

Para apreciar la naturaleza del equilibrio debemos avaluar los trabajos producidos en una deformación virtual.

Una pieza recta comprimida resiste siempre en condiciones estables las deformaciones virtuales de comprensión, torsión y cisalle, pero no siempre las de flexión. Estas deformaciones, por ser virtuales, pueden considerarse por separado. Estudiaremos, por lo tanto, sólo los trabajos virtuales producidos por deformaciones de flexión.

Además limitaremos nuestro estudio a piezas en las cuales no sea necesario considerar la hipótesis de flexión gausa.

En tales condiciones, para saber si una pieza puede resistir o no una carga dada P debemos verificar si los trabajos virtuales, que son siempre infinitamente pequeños de segundo orden, son negativos o positivos. Esta verificación debe ser hecha para la curva elástica la más desfavorable de todas, es decir, para aquellas que hace máximo el valor de los trabajos virtuales.



1 2 3

Sea una columna de altura *h* cargada con un peso *P*. Como la deformación debe ser virtual, el trabajo total producido tanto por la flexión de la pieza como por el descenso *e* del peso *p*, será con errores de orden superior:

$$\delta \tau = p\varepsilon - \frac{1}{2} E \int_0^h I\, y''^2\, dx \quad (1),$$

(1) La expresión del trabajo molecular de flexión es más conocida bajo la forma:

$$\frac{1}{2}\int_0^h \frac{M^2}{EI}\, dx.$$

Pero tenemos por otra parte:

$$\frac{M}{EI} = \frac{d^2 y}{dx^2} = y''.$$

de donde:

$$\frac{M^2}{E^2 I^2} = y''^2$$

y de aquí:

$$\frac{M^2}{EI} = y''^2 EI.$$

Luego, como *E* es constante:

$$\frac{1}{2}\int_0^h \frac{M^2}{EI}\, dx = \frac{1}{2} E \int_0^h I\, y''^2\, dx.$$

en que *E* es el módulo de elasticidad del material, *I* el momento de inercia de la sección que se encuentra a una distancia *x* de la base e *y* la función de *x* que define el desplazamiento horizontal virtual del centro de gravedad de la sección.

La relación que existe entre ε y la función *y* es, tomando en consideración que *y* es infinitamente pequeña:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\int_0^h y'^2\, dx \qquad (1)$$

(1) Esta condición se obtiene expresando la diferencia entre la longitud de la curva virtual y su cuerda.

En efecto, sabemos:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + y'^2},$$

de donde:

$$d\varepsilon = ds - dx = dx\left[\sqrt{1 + y'^2} - 1\right]$$
$$= dx\,\frac{y'^2}{1 + \sqrt{1 + y'^2}}.$$

Como y e y' virtuales son infinitamente pequeños, se puede escribir, despreciando errores de orden superior:

$$d\varepsilon = \tfrac{1}{2}\,y'^2\,dx,$$

y, en fin:

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}\int_0^h y'^2\,dx.$$

Para poder comparar y decidir cuál de dos formas de la curva elástica es la más peligrosa, será preciso imponerles la condición que produzcan el mismo descenso ε y entonces ver para cuál de ellas el trabajo molecular es menor en valor absoluto.

La forma más peligrosa de la función y que define la curva elástica es entonces aquella para la cual la integral siguiente es mínima:

$$\int_0^h I\,y''^2 dx,$$

con la condición:

$$\int_0^h y'^2\,dx = 2\varepsilon.$$

Este problema se resuelve por el método de las variaciones buscando las condiciones de mínimo de la integral:

$$\int_0^h (I\,y''^2 - \lambda^2\,y'^2)\,dx,$$

en que λ es una constante que agregada a las constantes arbitrarias que aparecerán al hacer las integraciones, permitirá a la función y cumplir todas las condiciones.

Dicha función debe verificar la ecuación diferencial:

$$\lambda^2\,\frac{dy'}{dx} + \frac{d^2\,(Iy'')}{dx^2} = 0,$$

ecuación que integrada dos veces da:

$$\lambda^2\,y + I\,y'' = a_1\,x + a_2.$$

La determinación de la función y se completa por medio de las condiciones en los límites, que dependen de la naturaleza de las ligazones en los extremos de la pieza. Ellas son, además de las condiciones que impongan las ligazones mismas, las que se obtienen de igualar a cero los coeficientes de las variaciones que queden arbitrarias en la ecuación:

$$\left[\left(\lambda^2\,y' + \frac{d\,(I\,y'')}{dx}\right)\delta y + Iy''\,\delta y'\right]_0^h = 0$$

En el caso de cargas dirigidas, es decir, de piezas articuladas en sus extremidades, las ligazones imponen, $y_o = 0$ e $y_h = 0$; y las variaciones que quedan arbitrarias en los extremos son $\delta y'_o$ y $\delta y'_h$; por lo tanto, $I_o\,y''_o = 0$ e $I_h\,y_h'' = 0$.

Con estas condiciones tenemos $a_1 = 0$ y $a_2 = 0$.

La ecuación queda entonces

$$\lambda^2\,y + I\,y'' = 0.$$

La función y que satisface esta ecuación diferencial, determinando las constantes arbitrarias y la constante λ por las condiciones $y_o = 0$, $y_h = 0$ e $\int_0^h y'^2\,dx = 2\varepsilon$, es la que define la curva elástica más desfavorable.

Su investigación no se puede efectuar sin conocer esplícitamente la función I. No obstante podremos encontrar el valor del peso P en función de λ.

En efecto, si se introduce el valor de I tomado de la ecuación anterior y el de ε dado más arriba, en la expresión de $\delta\tau$ se tiene:

$$\delta\tau = \tfrac{1}{2}\, p \int_0^h y'^2\, dx - \tfrac{1}{2}\, E\lambda^2 \int_0^h y\, y''\, dx.$$

Efectuando por partes la segunda integral se llega a:

$$\delta\tau = \tfrac{1}{2}\,(p - E\lambda^2) \int_0^h y'^2\, dx$$

Como la única integral que queda es esencialmente positiva, el signo de los trabajos virtuales depende únicamente del paréntesis. Luego si $p < E\lambda^2$, el equilibrio es estable y si $p > E\lambda^2$, el equilibrio es inestable.

Por lo tanto el peso máximo P será:

$$P = E\lambda^2$$

Se demuestra fácilmente que en otros casos usuales de ligazones en los extremos, el peso P tiene esta misma expresión.

Si suponemos que en una columna articulada en sus extremos el momento de inercia es constante, se obtiene para λ, después de integrar la ecuación y de acuerdo con las condiciones:

$$\lambda = n \frac{\pi \sqrt{I}}{h},$$

en que n es un número entero. Escogiendo $n = 1$ se tiene:

$$P = \frac{\pi^2 E I}{h}.$$

Con lo cual la fórmula de Euler queda demostrada por los trabajos virtuales.

* * *

Por lo expuesto anteriormente vemos que el peso máximo P es el valor de p que anula la expresión de $\delta\tau$, o sea:

$$P = \frac{E}{2\varepsilon} \int_0^h I\, y''^2\, dx,$$

calculando la integral para la función y que la hace mínima y con la condición:

$$\int_0^h y'^2\, dx = 2\varepsilon$$

El peso P queda entonces determinado cuando se conoce la función I que define el momento de inercia a toda altura x, o sea, cuando se conoce la distribución de la materia a lo largo de la columna.

El problema que nos proponemos resolver es determinar la distribución de la materia que conduce al mayor valor del peso P.

Para ésto es preciso agregar dos condiciones nuevas. Primero, que el volumen de la pieza sea dado y segundo, que exista alguna relación entre el momento de inercia I y la sección ω de la pieza.

Sin estas condiciones se podría aumentar indefinidamente el valor del momento de inercia, sea empleando una cantidad infinita de materia, sea alejando la materia de que se dispone del eje de la columna.

La primera de estas condiciones nos da:

$$\int_0^h \omega\, dx = V.$$

La segunda será una relación entre I y ω que dependerá de alguna condición arbitraria, extraña al problema que estamos tratando. Por ejemplo, ella sería $I = k\omega^2$ si quisiéramos que las secciones fueran figuras semejantes: si deseáramos reforzar las alas de un dobleté, la relación sería aproximadamente $I' = I_0 + f^2\omega$; etc.

Según ésto podemos concluir que para encontrar la mejor distribución de la materia debemos bus ır solamente dos funciones de x, a saber, y y ω, tales que la primera haga mínima la integral $\int_0^h I y''^2 dx$ suponiendo ω constante y la segunda la haga máxima suponiendo que y no varía. Estas funciones están, por otra parte, sometidas a las condiciones:

$$\int_0^h y'^2 dx = 2\varepsilon,$$

$$\int_0^h \omega\, dx = V.$$

Aunque no puede decirse que este sea propiamente un problema de máximos y mínimos, él debe ser tratado como si lo fuera, es decir, es preciso buscar dos funciones y y ω tales que sus variaciones infinitesimales no alteren la integral:

$$\int_0^h (I y''^2 - \lambda^2 y'^2 - 2\mu\omega)\, dx,$$

en que λ y μ son constantes que permitirán a las funciones satisfacer todas las condiciones.

Este problema deberá ser tratado especialmente en cada caso.

Veremos como ejemplo las columnas cuyas secciones son figuras semejantes.

La integral se transforma entonces como sigue:

$$\int_0^h (k\,\omega^2 y''^2 - \lambda^2 y'^2 - 2\mu\omega)\, dx.$$

Las funciones buscadas deben satisfacer las ecuaciones:

$$\lambda^2 \frac{dy'}{dx} + K \frac{d^2 (\omega^2 y'')}{dx^2} = 0.$$

$$k\,\omega\, y''^2 = \mu$$

Integrando dos veces la primera se tiene:

$$\lambda^2 y + k\,\omega^2 y'' = a_1 x + a_2.$$

Las variaciones en los límites deben satisfacer la ecuación:

$$\left[\left(\lambda^2 y' + k\frac{d(\omega^2 y'')}{dx}\right)\delta y + k\omega^2 y''\,\delta y'\right]_0^h = 0$$

Veamos solamente el caso de cargas dirigidas. Entonces, $y_0 = 0$ e $y_h = 0$, y $\delta y'_0$ y $\delta y'_h$ son arbitrarias, luego $\omega_0^2 y''_0 = 0$ y $\omega_h^2 y_h'' = 0$, o, más bien, infinitamente pequeños de tercer orden. Se ve entonces que ω_0 y ω_h son infinitamente pequeños de orden 4|3, porque μ debe ser, por homogeneidad infinitesimal, un infinitamente pequeño de segundo orden.

El sistema se reduce así a:

$$\lambda^2 y + k\omega^2 y'' = 0,$$

$$k\,\omega y''^2 = \mu$$

Eliminando y y poniendo $a = \frac{4\lambda^2}{3k}$ se tiene:

$$\omega'^2 + 2\omega\,\omega'' = -a^2.$$

De donde integrando:

$$\omega = \frac{k}{a^2 + \omega'^2}$$

Como $\omega_o = 0$ y $\omega_h = 0$ se tiene: $\omega'_o = +\infty$ y $\omega'_h = -\infty$, aceptando que la función ω ha de ser continua.

Diferenciando la ecuación anterior y sustituyendo $\omega' = a \operatorname{cotg.} \frac{\vartheta}{2}$, se obtiene finalmente el sistema paramétrico:

$$\omega = \frac{k_1}{2a^2}(1 - \cos\vartheta).$$

$$x = \frac{k_1}{2a^3}(\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta) + k_2$$

Se llega a tener $k_2 = 0$ y $k_1 = \frac{a^3 h}{\pi}$ por las condiciones que si $\vartheta = 0$, $x = 0$ y si $\vartheta = 2\pi$, $x = h$. También se encuentra, $a = \frac{4\pi}{3h}\Omega$, por la condición $\int_o^h \omega\, dx = V$, llamando Ω la sección media $\frac{V}{h}$.

Luego la forma más ventajosa de las columnas de secciones semejantes está definida por las ecuaciones:

$$\omega = \frac{2}{3}\Omega\,(1 - \cos\vartheta),$$

$$x = \frac{h}{2\pi}(\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta).$$

Como la expresión del peso *P* es, cualquiera que sea la forma de la columna, $P = E\lambda^2$, obtenemos, recordando que $\lambda^2 = \frac{3}{4} k a^2$:

$$P = \frac{4}{3}\,\frac{\pi^2 E\, Im}{h^2}$$

en que *Im* es el momento de inercia $k\Omega^2$ de la sección media.

Podemos concluir en este caso que la columna de la mejor forma posible resiste 1|3 más que aquella del mismo peso y de perfil semejante pero constante.

Santiago, de Chile, Diciembre de 1926.