Enrique Cruchaga

Una nueva resolvente de la ecuación general del cuarto grado

EN 1917 expuse en la revista «American Mathematical Monthly» de Chicago un método original y sencillo para obtener la resolvente de Lagrange de la ecuación general del cuarto grado. por medio de coeficientes indeterminados. Más tarde, estudiando en el tratado de J. A. Serret un teorema de la teoría general de las ecuaciones, llegué al convecimiento de que la ecuación general del cuarto grado podría reducirse directamente, lo cual me confirmaba también la aplicación del método de Ruffini, llamado comúnmente de Horner.

Bajo este convencimiento, llegué a obtener por fin una nueva resolvente. «Grunzuge der Antiken und Modernen Algebra» que por de pronto no se halla catalogada. El método que seguí y que expuse en los Anales de la Universidad del año pasado, es el siguiente:

$$x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = O \tag{1}$$

Llamemos

$$\begin{array}{ll} Z_1 = x_1 + x_2 & Z_4 = x_2 + x_3 \\ Z_2 = x_1 + x_3 & Z_5 = x_2 + x_4 \\ Z_3 = x_1 + x_4 & Z_6 = x_3 + x_4 \end{array} \tag{2}$$

Nuestra resolvente podrá escribirse así:

$$Z^6 - AZ^5 + BZ^4 - CZ^3 + DZ^2 - EZ + F = O \tag{3}$$

Determinando sus coeficientes, encuentro:

$$\begin{array}{ll} A = 3a & D = 2a^2b + b^2 + ac - 4d \\ B = 2b + 3a^2 & E = ab^2 + a^2c - 4ad \\ C = 4ab + a^3 & F = a^2d + c^2 - abc \end{array} \tag{4}$$

Reparemos que, si "a" fuese igual a cero, desaparecerían los coeficientes de las potencias impares de Z y la resolvente sería por tanto bicúbica. Haciendo pues

5) $$y=x-\frac{a}{4}$$ tendremos:

6) $$y^4+\left(b-\frac{3}{8}a^2\right)y^2\pm\left(c+\frac{a^3}{8}-\frac{ab}{2}\right)y+\frac{a^2b}{16}+d-\frac{3}{256}a^4-\frac{ac}{4}=O$$

Para esta ecuación transformada encuentro una nueva resolvente, como sigue:

7) $$U^6+\left[2b-\frac{3}{4}a^2\right]U^4+\left[\frac{3}{16}a^4+b^2+ac-a^2b-4d\right]U^2+\left[c+\frac{a^3}{8}-\frac{ab}{2}\right]^2=O$$

ecuación que puede resolverse como una del 3er. grado, haciendo

8) $$U^2=V$$

Pongamos que:

9) $$U_1=y_1+y_2 \quad U_3=y_1+y_4 \quad U_5=y_2+y_4$$
$$U_2=y_1+y_3 \quad U_4=y_2+y_3 \quad U_6=y_3+y_4$$

Tendremos que:

10) $$\begin{aligned} U_1+U_2+U_3&=2y_1\\ U_1+U_4+U_5&=2y_2\,,\\ U_2+U_4+U_6&=2y_3\\ U_3+U_5+U_6&=2y_4\end{aligned}$$

Hemos combinado los índices de este modo:

I.
1—2—3
1—4—5
2—4—6
3—5—6

para evitar las agrupaciones siguientes de ellos:

II.
1—6
2—5
3—4 que suman cero, a saber:

$$\begin{aligned} U_1+U_6&=0\\ U_2+U_5&=0\\ U_3+U_4&=0\end{aligned}$$

Las otras combinaciones posibles, exceptuando las agrupaciones apuntadas, o sean:

III.
1—2—4
1—3—5
2—3—6
4—5—6

representarán los índices de las siguientes ecuaciones:

11)
$$\begin{aligned} U_4+U_5+U_6&=-2y_1\\ U_2+U_3+U_6&=-2y_2\\ U_1+U_3+U_5&=-2y_3\\ U_1+U_2+U_4&+-2y_4 \end{aligned}$$

dualidad que corresponde al doble signo del coeficiente de "y" en la ecuación 6).

Así es que, cualesquiera de las agrupaciones I o III que ensayemos, obtendremos inmediatamente uno de los valores absolutos de "y", restándonos sólo ver que su signo sea el que le corresponde, para poder escribir en seguida sus cuatro valores. Simultáneamente se obtienen los valores de x de la ecuación

$$x= y +\frac{a}{4}$$