Consideraciones teóricas sobre un método de cálculo de una viga pórtico empotrada

POR H. E. S.

(*Conclusión*)

Ahora bien, si en las ecuaciones (3) consideramos que las fuerzas P y las reacciones incógnitas X'', X''' etc. se hacen iguales a cero, al mismo tiempo que X' se hace igual a la unidad, se tiene:

$$R = R'$$
$$\sigma = \sigma'$$

Se deduce, pues, que si en el sistema hipotético estáticamente determinado, determinamos las reacciones de apoyo y las tensiones moleculares para este caso

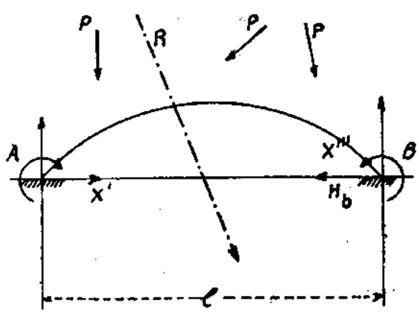

Fig. 1.

que llamaremos X' = 1, los valores obtenidos serán los que corresponden a R' y σ'.

Este artificio de cálculo no pasa de ser una interpretación mecánica de la derivada parcial de las ecuaciones (3) con respecto a los valores estáticamente indeterminados X. Es algo análogo a la interpretación geométrica que se dá a la derivada de una función, diciendo que es el coeficiente angular de la tangente a la curva que ella representa.

Determinados por este procedimiento los valores R', R'', R''' etc. y σ', σ'', σ''' etc. la ecuación (2) combinada con las ecuaciones (3) forman un sistema de la forma siguiente:

$$(4)\quad \begin{cases} \Sigma R' \triangle r = \displaystyle\int_v^0 \sigma' \frac{(\sigma_0 + \sigma' X' + \sigma'' X'' + \ldots)}{E} d v \\ \Sigma R'' \triangle r = \displaystyle\int_v^0 \sigma'' \frac{\sigma_0 + \sigma' X' + \sigma'' X'' + \ldots}{E} d v \\ \Sigma R''' \triangle r = \displaystyle\int_v^0 \sigma''' \frac{\sigma_0 + \sigma' X' + \sigma' X'' + \ldots}{E} d v \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

El número de estas ecuaciones es igual al de las incógnitas X', X'', X''' etc., luego el sistema es determinado.

Ecuaciones correspondientes a un arco encastrado

Vamos a aplicar las ecuaciones (4) al caso del arco encastrado, representado en la Fig. 1. Como caso hipotético estáticamente determinado consideraremos el mismo arco provisto de un carro en A y una rótula en B (Fig. 2).

En la figura 3 hemos representado el caso X' = 1. No hemos creído necesario representar los casos X'' = 1 y X''' = 1 por ser análogos.

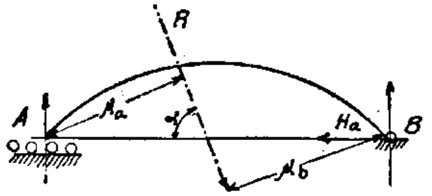

Fig. 2.

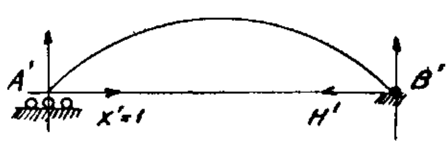

Fig. 3

Vamos a determinar los valores de A_o, B_o, H_o, A', B', H', A'', B'', H'', A''', B''', H''' por el procedimiento antes indicado.

De la figura 2 se deduce:

$$A_o = \frac{R\, r_b}{l} \qquad B_o = \frac{R\, ra}{l} \qquad H_o = R \cos \alpha$$

siendo R la resultante de las fuerzas P.

De la figura 3 se deduce:

$$A' = 0 \qquad B' = 0 \qquad H' = -1$$

Para el caso X'' = 1 (Fig. 1) se tiene:

$$A'' = -\frac{1}{l} \qquad B'' = +\frac{1}{l} \qquad H'' = 0$$

Para el caso X''' = 1 se tiene:

$$A''' = +\frac{1}{l} \qquad B''' = -\frac{1}{l} \qquad H''' = 0$$

Reemplazando estos valores en las ecuaciones generales (3):

$$A = \frac{R\, r_b}{l} - \frac{1}{l} X'' + \frac{1}{l} X'''$$

$$B = \frac{R\, r_a}{l} + \frac{1}{l} X'' - \frac{1}{l} X'''$$

$$H_b = R \cos \alpha - X'$$

Para poder aplicar las ecuaciones (4) nos falta expresar los valores de σ, σ_0, σ', σ'' etc.

Aplicando la fórmula de Navier y haciendo la hipótesis de que la deformación producida por el esfuerzo normal es despreciable al lado de la producida por el momento de flexión se tiene:

$$\sigma = \frac{M}{I} v$$

Siendo I el momento de inercia de la sección considerada y v la ordenada variable de la fibra de que se trata referida a un sistema de ejes principales de inercia.

Del mismo modo:

$$\sigma' = \frac{M'}{I} v \qquad \sigma'' = \frac{M''}{I} v \qquad \sigma''' = \frac{M'''}{I} v$$

Reemplazando estos valores en las ecuaciones (4) resulta:

$$R' \triangle r = \int_{v} \frac{M' M}{E I^2} v^2 \, d v = \int \int_{V}^{o} M' \frac{M}{E I^2} v^2 \, d_w \, ds$$

como: $\int_{\Omega} v^2 \, d_w = I$

$$(5) \quad \begin{cases} \Sigma R' \triangle r = \int_{s}^{o} M' \frac{M}{E I} ds \\ \Sigma R'' \triangle r = \int_{s}^{o} M'' \frac{M}{E I} ds \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Queda, pues, reducido el problema de deteminar las tensiones σ en los casos $X' = 1$, $X'' = 1$ etc. a la determinación de los momentos de flexión.

Consideremos un sistema de ejes coordenados cuyo origen esté en A cuyo eje Y sea vertical y cuyo eje X sea horizontal.

Tenemos que:

$$M = M_0 + M' X' + M'' X'' + M''' X'''$$

De las figuras relativas a los tres casos $X' = 1$, $X'' = 1$ y $X''' = 1$ se deduce:

$$M' = -y$$

$$M'' = 1 - \frac{x}{l}$$

$$M''' = \frac{x}{l}$$

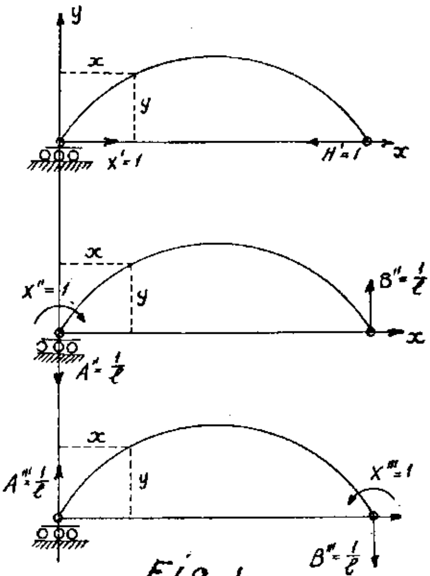

Fig. 4

M_0 representa el momento para el caso hipotético estáticamente determinado. Tenemos por consiguiente:

$$(6) \qquad M = M_0 - X'\,y + \left(1 - \frac{x}{l}\right) X'' + \frac{x}{l}\, X'''$$

y las ecuaciones (4) toman la forma siguiente, si suponemos que los apoyos no sufren desplazamiento alguno:

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_s^o - y\, \frac{M_0 - X'\,y + \left(1 - \frac{x}{l}\right) X'' + \frac{x}{l}\, X'''}{E\,I}\, ds = 0 \\ &\int_s^o \left(1 - \frac{x}{l}\right) \frac{M_0 - X'\,y + \left(1 - \frac{x}{l}\right) X'' + \frac{x}{l}\, X'''}{E\,I}\, ds = 0 \\ &\int_s^o \frac{x}{l}\, \frac{M_0 - y\,X' + \left(1 - \frac{x}{l}\right) X'' + \frac{x}{l}\, X'''}{E\,I}\, ds = 0 \end{aligned} \right.$$

Integrando estas ecuaciones y resolviéndolas con respecto a X' X'' y X''' e introduciendo estos valores en la ecuación (6) se tiene resuelto el problema de determinar el lugar de momentos de un arco encastrado.

Las ecuaciones (7) se simplifican notablemente haciendo un cambio en el sistema de ejes coordenados adoptado para determinar los momentos. Este cambio consiste en trasladar el origen a un punto O tal que cada una de las 3 ecuaciones (7) encierre sólo uno de los valores estáticamente indeterminados X', X'', X'''

Llamando ξ . η las coordenadas del punto O con respecto al sistema de coor-

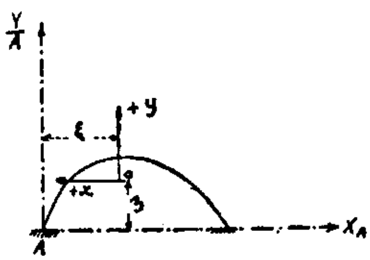

Fig. 5

denadas A (que de aquí en adelante designaremos con el índice A) y suponiendo que el eje de las X del nuevo sistema tiene dirección contraria a la del primero se tiene:

$$y = y_a - \eta \qquad x = \xi - x_a$$

Además para simplificar las notaciones haremos:

$$\frac{X''' - X''}{l} = Y$$

Introduciendo estos valores en la ecuación (6):

$$M = M_0 - X' (y + \eta) + Y (\xi - x) + X''$$

$$M = M_0 - X' y - Y x - (X' \eta - Y \eta - X'')$$

También con el objeto de simplificar las notaciones hagamos en esta última ecuación:

$$X' \eta - Y \xi - X'' = Z$$

y

$$X' = X$$

Tenemos así:

$$(8) \quad M = M_0 - X\,y - Y\,x - Z$$

Reemplazando en las ecuaciones (7) se tiene.

$$\eta \int_s^0 \frac{M_0 - X\,y - Yx - Z}{E\,I}\,ds - \int_s^0 \frac{M_0 - X\,y - Y\,x - Z}{y_1\;E\,I}\,ds = 0$$

$$\frac{1-\zeta}{l}\int_s^0 \frac{M_0 - X\,y - Y\,x - Z}{E\,I}\,ds - \frac{1}{l}\int_s \frac{M_0 - X\,y - Y\,x - Z}{E\,I}\,ds = 0$$

$$\frac{\zeta}{l}\int_s^0 \frac{M_0 - X\,y - Y\,x - Z}{E\,I}\,ds - \frac{1}{l}\int_s^0 x\,\frac{M_0 - X\,y - Y\,x - Z}{E\,I}\,ds = 0$$

Sustrayendo de la segunda de estas ecuaciones la 3.ª se obtiene:

$$\left(1 - \frac{2\,\zeta}{l}\right)\int_s^0 \frac{M_0 - X\,y - Y\,x - Z}{E\,I}\,ds = 0$$

o sea:

$$\int_s^0 \frac{M_0 - X\,y - Y\,x - Z}{E\,I}\,ds = 0$$

Combinando esta ecuación con las tres anteriores se tiene:

$$(9)^{*} \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_s^0 (M_0 - X\,y - Y\,x - Z)\,\frac{y\,ds}{E\,I} = 0 \\ &\int_s^0 (M_0 - X\,y - Y\,x - Z)\,\frac{x\,ds}{E\,I} = 0 \\ &\int_s^0 (M_0 - X\,y - Y\,x - Z)\,\frac{ds}{E\,I} = 0 \end{aligned} \right.$$

(*) Se puede llegar a estas ecuaciones por un camino más corto. En efecto, la primera de ellas significa que los apoyos no sufren desplazamiento en el sentido horizontal, la segunda que tampoco lo sufren en el vertical y la tercera que el encastramiento es perfecto.

Multipliquemos ahora cada una de las ecuaciones (9) por una cantidad arbitraria que llamaremos I_0 y elijamos el punto O origen de coordenadas de tal modo que:

$$(10) \quad \int_s^0 y \frac{I_0}{I} ds = 0 \qquad \int_s^0 x \frac{I_0}{I} ds = 0 \qquad \int_s^0 y\, x \frac{I_0}{I} ds = 0$$

Estas ecuaciones significan que el punto O debe coincidir con el centro de gravedad del arco si a cada elemento de arco se le supone un peso ficticio igual a $\frac{I_0}{I}$ ds = ds', significando I el momento de inercia de la sección trasversal en el punto considerado.

Combinando las ecuaciones (9) con las (10) se obtiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_s^0 \frac{M_0\, y}{E} ds' - X \int_s^0 \frac{y^2\, ds'}{E} = 0 \\ \displaystyle\int_s^0 \frac{M_0\, x}{E} ds' - Y \int_s^0 \frac{x^2\, ds'}{E} = 0 \\ \displaystyle\int_0^s \frac{M_0}{E} ds' - Z \int_s^0 \frac{ds'}{E} = 0 \end{array} \right.$$

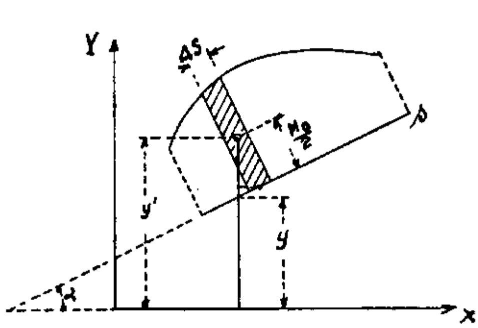

Fig. 6

De estas ecuaciones, si se considera el coeficiente de elasticidad E constante, se deducen las siguientes:

$$(11)\quad \left\{ \begin{aligned} X &= \frac{\int_s^0 M_0\, y\, ds'}{\int_s^0 y^2\, ds'} \\ Y &= \frac{\int_s^0 M_0\, x\, ds'}{\int_s^0 x^2\, ds'} \end{aligned} \right. \qquad Z = \frac{\int_s^0 M_0\, ds'}{\int_s^0 ds'}$$

La integral $\int_s^0 y^2\, ds'$ representa el momento de inercia del polígono de barras respecto al eje de las X ; la integral $\int_s^0 x^s\, d'_s$ representa el momento de inercía respecto al eje de las Y; y la integral $\int_s^0 d_s{}'$ el peso, que llamaremos peso elástico, del polígono de barras.

Las integrales que figuran en los denominadores de las fórmulas (11) tienen también una interpretación geométrica aproximada. En efecto, si se divide el arco en pequeños trozos de longitud S y se reemplazan las integrales por sumas se tiene:

$$\Sigma\, M_0\, y\, \frac{I_0}{I} \triangle\, s = y_s\, \frac{I_0}{I}\, \Sigma\, M_0 \triangle\, s$$

Llamando:

$$y_s = \frac{\Sigma\, y\, M_0 \triangle\, s}{\Sigma\, M_0 \triangle\, s}$$

Se considera que el momento de inercia es constante en el trozo S y que éste es recto. La expresión $\Sigma\, M_0 \triangle\, S$ es el área de la curva de los momentos M_0 correspondiente al trozo S.

La ordenada y_s se obtiene proyectando ortogonalmente el centro de gravedad del área $\Sigma M_0 \Delta S$ sobre el trozo S.

En efecto, si llamamos y_0 la ordenada del centro de gravedad de la superficie de momentos, tendremos que:

$$y_0 - \Sigma M_0 \Delta s = \Sigma y' M_0 \Delta s$$

y como:

$$y' = y + \frac{M_0}{2 \cos \alpha}$$

se tiene que:

$$y_0 = \frac{\Sigma \left(y + \frac{M_0}{2 \cos \alpha} \right) M_0 \Delta s}{\Sigma M_0 \Delta s}$$

$$y_0 = \frac{\Sigma \frac{M_0^2}{2 \cos \alpha} \Delta s}{\Sigma M_0 \Delta s} = \frac{\Sigma y M_0 \Delta s}{\Sigma M_0 \Delta s} = y_s$$

Llamemos Z_0 la distancia del centro de gravedad del área $\Sigma M_0 \Delta S$ al trozo S:

$$\frac{\Sigma \frac{M_0^2}{2 \cos \alpha} \Delta S}{\Sigma M_0 \Delta S} = \frac{Z_0 \Sigma M_0 \Delta S}{\cos \alpha \Sigma M_0 \Delta S} = \frac{Z_0}{\cos \alpha}$$

Luego:

$$y_s = y_0 - \frac{Z_0}{\cos \alpha}$$

que era lo que se quería demostrar.

El mismo procedimiento se emplea para determinar el valor de la integral $\int_s^o M_0 y \, ds'$. En cuanto a la integral $\int_s^o M_0 \, ds'$ es el área total de momentos.

Simplificaciones posibles en el caso de un marco cuadrangular.

En el caso de un marco cuadrangular cuyos piés derechos van a estar solicitados de manera análoga, es evidente que sus momentos de inercia serán iguales; no así el momento de inercia del travesaño, cuya solicitación es diferente.

Supongamos que el momento de inercia de los pies derechos es constante en toda su longitud, y lo mismo respecto al del travesaño.

Hagamos:

I_0 = Momento de inercia del travesaño
I = » » » de los pies derechos.

Se deduce:

$$\text{Peso elástico del travesaño} = \frac{I_0}{I_0}\, l = 1 \times l$$

$$\text{» » de los piés derechos} = \frac{I_0}{I}\, h$$

llamando l la luz del travesaño y h la altura de los pies derechos.

Por razón de simetria la abscisa del centro de gravedad del marco

$$\zeta = \frac{l}{2}$$

Para obtener el valor de la ordenada η escribamos la ecuación de momentos de los pesos elásticos del marco respecto a un eje que coincida con el travesaño. Llamemos G el peso elástico total del marco que es igual a.

$$G = l + 2\,\frac{I_0}{I}\, h$$

Se tiene:

$$G\,(h - \eta) = (2)\,\frac{I_0}{I}\, h\, \frac{h}{2} = \frac{I_0}{I}\, h^2$$

$$h - \eta = \frac{\dfrac{I_0}{I}\, h^2}{l + 2\dfrac{I_0}{I}\, h}$$

Es más cómodo no despejar η sino utilizar el valor $(h - \eta)$ que es la distancia del centro de gravedad al eje del travesaño y que llamaremos Z_0.

$$h - \eta = Z_0$$

Los denominadores de las fórmulas (11) adquieren los siguientes valores:

$$\int_s^o Y^2 \, ds' = \frac{I_o}{I} \cdot \frac{h^2}{3} \cdot (2\,h - 3\,Z_o)$$

$$\int_s^o x^2 \; ds' = \frac{l^2}{12} \left\{ l + 6 \; \frac{I_o}{I} \; h \right\}$$

$$\int_s^o ds' = G = l + 2 \; \frac{I_o}{I} \; h$$

Los numeradores de las mismas fórmulas, si llamamos F_h el área de momentos del montante que queda al lado positivo de las X (momento M_o del caso estáticamente determinado que se haya elegido) $F_{h'}$. la del que queda al lado negativo y F_l la del travesaño, toman la siguiente forma:

$$\int_s^o M_o \, y \, ds' = \frac{I_o}{I} \; F_h \, y_h + F_l \; y_l + \frac{I_o}{I} \; F_{h'} \, y_{h'}$$

$$\int_s^o M_o \, x \, ds' = \frac{I_o}{I} \; F_h \, x_h + F_l \; x_l - \frac{I_o}{I} \; F_{h'} \; x_{h'}$$

$$\int_s^o M_o \, ds' = \frac{I_o}{I} \; F_h + F_l + \frac{I_o}{I} \; F_{h'}$$

Las coordenadas x_h y_h , x_l y_l etc., corresponden a la definición que dimos en el párrafo anterior de y_s .

El problema de determinar el lugar de momentos para el caso de un marco rígido encastrado, queda así reducido a:

1.º Determinar el lugar de momentos de un caso hipotético estáticamente determinado.

2.º—Determinar los centros de gravedad de las áreas de momentos referentes al travesaño y a los montantes y el valor de estas mismas áreas.

3.º—Fijarse los momentos de inercia del travesaño y de los montantes y con estos valores determinar el peso elástico de los elementos del marco y su centro de gravedad.

4.º—Aplicar las fórmulas (11).

5.º—Aplicar la fórmula (8).

Este método se encuentra explicado en la obra «Nuevos métodos de Resistencia de Materiales», de Müller-Breslau.