CÁLCULO DE VIGAS CONTINUAS

POR EL MÉTODO DE LAS LÍNEAS DE INFLUENCIA

POR

RÉGULO ANGUITA G.

Si en las ecuaciones (3) a (16) se hace $P=1$ resultan las ecuaciones de las líneas de influencia de los momentos de apoyo i para secciones cualesquiera del primero i segundo tramos.

En las ecuaciones (9) a (16) se deberán introducir los valores de M_1 i M_2 correspondientes a la posicion de P sobre la viga.

De las mismas ecuaciones se puede investigar con facilidad la forma de la línea de nfluencia en cuanto a signos.

Hagámoslo por via de ejemplo para una seccion x del primer tramo.

En la ecuacion (9)

$$M_x = M_1 \frac{x}{l_1} - \frac{a}{l_1} (l_1 - x)$$

se debe introducir el valor de M_1 de la ecuacion (3)

$$\overset{+}{M}_1 = \frac{a}{l_1} \frac{2(l_1 + l_2)(l_1^2 - a^2)}{4(l_1 + l_2)^2 - l_2^2}$$

M_1 es positivo, por lo tanto es necesario averiguar cual de los dos términos del segundo miembro de (9) es mayor.

$$4 l_1^2 < 4(l_1 + l_2)^2 - l_2^2$$

I cuando l_1 no difiere mucho de l_2

$$4 l_1^3 > 2(l_1 + l_2)(l_1^2 - a^2)$$

Entónces:

$$\frac{2(l_1 + l_2)(l_1^2 - a^2)}{4(l_1 + l_2)^2 - l_2^2} < \frac{4 l_1^3}{4 l_1^2}$$

$$\div \qquad < l_1$$

I de aquí que al sustituir M_1 por a en la ecuacion (9) se tenga para el primer término del segundo miembro un valor mayor que el verdadero. Se deducen así las siguientes conclusiones:

$$\frac{a\,x}{l_1} \text{ puede ser } <\text{o}> \frac{a}{l_1}(l_1 - x)$$

$$\text{para } x \lesseqgtr \frac{l_1}{2} \qquad \frac{a\,x}{l_1} < \frac{a}{l_1}(l_1 - x)$$

$$\text{i para } x \geqslant \frac{l_1}{2} \qquad \frac{a\,x}{l_1} > \frac{a}{l_1}(l_1 - x)$$

Estos límites no son del todo rigurosos por cuanto resultan de sustituir para M_1 un valor mayor que el verdadero. En realidad el cambio de signo se produce para una seccion x próxima a $0.8l_1$.

Luego las ordenadas de la línea de influencia serán todas negativas en el primer tramo para secciones x comprendidas entre 0 i $0.8l_1$ mas o ménos, i para $x > 0.8l_1$ la línea de influencia podrá tener ordenadas positivas i negativas en ese mismo tramo.

Las ordénadas de las líneas de influencia en el segundo tramo son dadas por la ecuacion (11)

$$M_x = M_1 \frac{x}{l_1}$$

i se debe introducir aquí el valor de M_1 correspondiente, es decir el de la ecuacion (5), M_1 es positivo luego todas las ordenadas del 2.º tramo serán positivas tambien.

En fin las ordenadas del 3.^{er} tramo se obtienen con la ecuacion (12)

$$M_x = M_1 \frac{x}{l_1}$$

Introduciendo aquí el valor de M_1 de la ecuacion (7) (que es negativo) resultan negativas todas las ordenadas del tercer tramo.

Para los apoyos i para secciones en el 2.º tramo puede discutirse en la misma forma el signo de las ordenadas en cada uno de los tramos.

En las figuras (12) a (16) puede verse la forma de las líneas de influencia en la mayor parte de los casos que se presentan.

No se ha tomado en cuenta en este desarrollo la accion indirecta de las cargas porque en realidad no tiene interes, desde que lo que se necesita para el cálculo de un enrejado por ej. son los momentos máximos en los nudos de ese mismo enrejado en los cuales la accion directa e indirecta son equivalentes.

USO DE LAS TABLAS DE MOMENTOS

Disposicion de las tablas.—Cada pájina que contiene las ordenadas de líneas de influencia correspondientes a unos de los casos que se presentan en la práctica tiene como argumentos: 1.° el número de tramos contínuos de la viga (*2 travées inégales*, *3 traveés symétriques, etc.*) i 2.° la razon $\theta = \frac{l_1}{l_2}$ entre la luz del primer tramo i la del segundo, variable de 0.05 en 0.05 de la luz. I para un número de tramos superior a dos se ha supuesto que la viga es simétrica, es decir que la razon θ se conserva tambien para los dos últimos tramos. En fin los tramos centrales son iguales al segundo.

Las tablas designan por a la absisa de la seccion a que corresponde la línea de influencia (en la fórmula que se han desarrollado hasta aquí se ha llamado x) i por x la absisa de la fuerza; ámbas se hacen variar de 0.10 en 0,10 de las luces de los tramos.

Las absisas a aparecen como encabezamiento en la primera línea horizontal con la notacion jenérica $0.10\,l \ldots 0.40\,l \ldots$ indicando así que pueden corresponder al tramo l_1 o l_2 i en la columna vertical correspondiente se encuentran los coeficientes, por los cuales hai que multiplicar la luz $l_1, l_2 \ldots$ para tener las ordenadas de la línea de influencia.

Se distinguen entre los coeficientes de que nos ocupamos algunos que están apuntados con números mas grandes i que saltan a la vista. Estos corresponden a la ordenada máxima de la línea de influencia, que se produce como es bien sabido cuando la fuerza móvil se encuentra en la misma seccion a o sea para $x = a$).

Signos.—Si se recuerda la discusion hecha anteriormente sobre el signo i la forma de la línea de influencia correspondiente a una seccion del 1^er tramo de una viga sobre 4 apoyos, se notará que segun nuestras convenciones, en cuanto a signos, para secciones a menores que $0{,}8\,l_1$, las ordenadas del 1.^er tramo son todas negativas, positivas las del 2.° i negativas otra vez las del tercero. — Fácil es observar que las tablas tienen notacion opuesta a la nuestra en cuanto a signos, i que si se quiere conservar nuestra convencion basta cambiar los signos (+) por (—) i los (—) por (+).

La primera parte de las tablas da las ordenadas de las líneas de influencia para secciones a, del 1.° 2.° i 3^er [*] tramos, cuando la fuerza P recorre esos mismos tramos ("*Ordonnées des lignes d'influence relatives à des sections faites dans la travée chargée*") Se encuentra tambien en el encabezamiento de las columnas verticales el tramo que recorre la fuerza P ("*Première travée*", ... "*deuxième travée*" i para 5 tramos "*troisième travée*").

Estas primeras tablas no permiten trazar la línea de influencia completa desde que solo dan las ordenadas del tramo en que se encuentra la seccion a.

La otra parte de las tablas que contiene las ordenadas de las líneas de influencia de los apoyos ("*Ordonnées des lignes d'influence relatives à des sections faites sur les ples*") i las de las líneas de influencia de secciones vecinas al tramo que recorre la fuer-

---

[*] Cinco tramos contínuos

za P (*"Ordonnées des lignes d'influence relatives à des sections faites dans une travée voisine de la travée chargée"*) permiten completar las líneas de influencia.

No aparecen, sin embargo, en las tablas todas las ordenadas, pero con la ayuda de las fórmulas que se han deducido, se hará ver que por lo ménos se tienen los datos suficientes para deducir cómodamente i con rapidez lo que falta.

Un ejemplo numérico nos permitirá aclarar mas estas ideas. Tomemos siempre una viga de tres tramos continuos, con $\theta = -\frac{l_1}{l_2} = 0.95$ i supongamos que se necesita trazar la línea de influencia del apoyo *1* (Cart i Portes, numeran los apoyos desde *0* empezando por la izquierda, i las luces *0 1*, *l* etc. tal como se ha hecho al deducir las fórmulas.

Para P en el 1.^er^ tramo la tabla da directamente los siguientes valores:

APOYO 1

P en el primer tramo

Absisa de P respecto a 0	*ordenada de la línea de influencia*	
$x = 0.10\ l_1$	$y = +\ 0.825812\ l_1$	
$= 0.20\ l_1$	$= +\ 0.050061\ l_1$	
$= 0.30\ l_1$	$= +\ 0.071180\ l_1$	
$= 0.40\ l$	$= +\ 0.087606\ l_1$	
$= 0.50\ l_1$	$= +\ 0.097774\ l_1$	
$= 0.57735\ l_1$	$= +\ 0.100356\ l_1$	máxima
$= 0.60\ l_1$	$= +\ 0.100121\ l_1$	
$= 0.70\ l$	$= +\ 0.093081\ l_1$	
$= 0.80\ l_1$	$= +\ 0.075091\ l_1$	
$= 0.90\ l_1$	$= +\ 0.044585\ l_1$	

Estos valores permiten trazar la curva dentro del tramo l_1 porque son, ademas, puntos de la curva los apoyos *0* i *1*. En efecto, el momento que produce en *1*, una fuerza colocada sobre *0* o sobre *1* es igual a cero.

Las ordenadas del 2.º tramo aparecen tambien directamente en la tabla.

APOYO 1 (PILE N.º 1)

P en el segundo tramo

Absisa de P respeto a 1	*Ordenada de la línea de influencia*	
$x = 0.10\ l_2$	$y = +\ 0.039965\ l_2$	
$= 0.20\ l_2$	$= +\ 0.065531\ l_2$	
$= 0.30\ l_2$	$= +\ 0.078768\ l_2$	
$= 0.3825\ l_2$	$= +\ 0.081874\ l_2$	máxima

Absisa de P respecto a 1	*Ordenada de la línea de influencia*
$= 0.40 \quad l_2$	$= +\ 0.081745\ l_2$
$= 0.50 \quad l_2$	$= +\ 0.076531\ l_2$
$= 0.60 \quad l_2$	$= +\ 0.065193\ l_2$
$= 0.70 \quad l_2$	$= +\ 0.049803\ l_2$
$= 0.80 \quad l_2$	$= +\ 0.032428\ l_2$
$= 0.90 \quad l_2$	$= +\ 0.015137\ l_2$

Valores que permiten trazar la curva en el 2.° tramo por cuanto los apoyos *2* i *3* son tambien puntos de ella.

Las ordenadas del 3.er tramo no se ven a primera vista en la tabla. Recuérdese como se dedujo la fórmula (7), que no es sino la misma fórmula (3) en la que se sustituyó a por $l_1 - a$ conservando el signo a toda la espresion. Se hizo notar tambien que el cambio de a por $l_1 - a$ no equivalia mas que a invertir el movimiento de la fuerza P sobre la viga.

De aquí que las ordenadas de la línea de influencia de momentos en el apoyo *1* se encuentren tambien en la tabla. En efecto, son iguales a las ordenadas del apoyo *2*, para el primer tramo cargado i leidas de 0.90 a $0.10 l_1$.

Por lo tanto las ordenadas del 3.er tramo son las siguientes:

APOYO 1. ("PILE N.° 1")

P en el tercer tramo

Absisa de P respecto a 2		*Ordenada de la línea de influencia*	
$x = 0.10\ l_1$	$(0.90 l_1)$	$y = -\ 0.011432\ l_1$	
$= 0.20\ l_1$	$(0.80 l_1)$	$= -\ 0.019254\ l_1$	
$= 0.30\ l_1$	$(0.70 l_1)$	$= -\ 0.023867\ l_1$	
$= 0.40\ l_1$	$(0.60 l_1)$	$= -\ 0.025672\ l_1$	
$= 0.42265\ l_1$	$(0.57735 l_1)$	$= -\ 0.025732\ l_1$	máxima
$= 0.50\ l_1$	$(0.50 l_1)$	$= -\ 0.025070\ l_1$	
$= 0.60\ l_1$	$(0.40 l_1)$	$= -\ 0.022463\ l_1$	
$= 0.70\ l_1$	$(0.30 l_1)$	$= -\ 0.018251\ l_1$	
$= 0.80\ l_1$	$(0.20 l_1)$	$= -\ 0.012836\ l_1$	
$= 0.90\ l_1$	$(0.10 l_1)$	$= -\ 0.006619\ l_1$	

La forma de la línea de influencia es la de la fig. (14).

Para otro número de tramos 5 por ejemplo pueden obtenerse tambien todas las ordenadas de una manera análoga.

Sea por ejemplo una viga de 5 tramos en que $\theta = \frac{l_1}{l_2} = 0.80$ (páj. 183 de Cart i Portes) se pide la línea de influencia del apoyo *2*. La tabla da directamente las ordenadas de los tres primeros tramos. Para P colocada en el cuarto o quinto tramo basta recordar, *que P en el cuarto tramo i momento en 2, equivale a P en el segundo tra-*

mo i momento en 3; i [illegible] *n el quinto tramo i momento en 2 es lo mismo que suponer P en el primer tramo i momento en 3 (Pile número 3)* Estos valores se hallan en la tabla i deberán leerse de 0.90 a 0.10 l.

El siguiente cuadro contiene todas las ordenadas de la línea de influencia de momentos de 2, omitiendo los máximos en los tramos.

APOYO 2

Absisas medidas desde el apoyo de la izquierda mas cercano	Ordenadas	Primer tramo	Segundo tramo	Tercer tramo	Cuarto tramo	Quinto tramo
$x = 0.10\,l$	$y =$	$-0.006370\,l_1$	$+0.014912\,l_2$	$+0.041813\,l_3$	$-0.011163\,l_4$	$+0.002956\,l_5$
$= 0.20\,l$	$=$	$-0.012354\,l_1$	$+0.032431\,l_2$	$+0.068456\,l_3$	$-0.018255\,l_4$	$+0.004979\,l_5$
$= 0.30\,l$	$=$	$-0.017566\,l_1$	$+0.050335\,l_2$	$+0.082134\,l_3$	$-0.021872\,l_4$	$+0.006171\,l_5$
$= 0.40\,l$	$=$	$-0.021620\,l_1$	$+0.066405\,l_2$	$+0.085052\,l_3$	$-0.022611\,l_4$	$+0.006638\,l_5$
$= 0.50\,l$	$=$	$-0.024130\,l_1$	$+0.078421\,l_2$	$+0.079412\,l_3$	$-0.021068\,l_4$	$+0.006483\,l_5$
$= 0.60\,l$	$=$	$-0.024709\,l_1$	$+0.084164\,l_2$	$+0.067419\,l_3$	$-0.017840\,l_4$	$+0.005808\,l_5$
$= 0.70\,l$	$=$	$-0.022971\,l_1$	$+0.081413\,l_2$	$+0.051277\,l_3$	$-0.013523\,l_4$	$+0.004719\,l_5$
$= 0.80\,l$	$=$	$-0.018532\,l_1$	$+0.067949\,l_2$	$+0.033191\,l_3$	$-0.008713\,l_4$	$+0.003319\,l_5$
$= 0.90\,l$	$=$	$-0.011003\,l_1$	$+0.041551\,l_2$	$+0.015364\,l_3$	$-0.004006\,l_4$	$+0.001711\,l_5$

Conviene recordar que $l_1 = l_5$ i $l_2 = l_3 = l_4$. La fig. (17) es la forma de la línea de influencia.

Antes de presentar un ejemplo numérico de la aplicacion a que se ha hecho referencia (Puente de «Los Morros») se indicará la manera de obtener las ordenadas de las líneas de influencia para secciones cualesquiera de los tramos.

Sea, para seguir el mismo caso anterior una viga de tres tramos simétricos en que $\theta = \frac{l_1}{l_2} = 0.95$ i se trata de obtener las ordenadas de la línea de influencia de la seccion $a = 0.30\,l_1$ (primer tramo). En la primera parte de las tablas en referencia (páj. 145) aparecen inmediatamente las ordenadas del primer tramo.

Seccion $a=0.30\,l_1$ (primer tramo)

P en el primer tramo

Absisa de la fuerza P	Ordenada de la línea de influencia
$x = 0.10\, l_1$	$y = -0.062256\, l_1$
$= 0.20\, l_1$	$= -0.124982\, l_1$
$= 0.30\, l_1$	$= -0.188646\, l_1$
$= 0.40\, l_1$	$= -0.153718\, l_1$
$= 0.50\, l_1$	$= -0.120668\, l_1$
$= 0.60\, l_1$	$= -0.089964\, l_1$
$= 0.70\, l_1$	$= -0.062076\, l_1$
$= 0.80\, l_1$	$= -0.037473\, l_1$
$= 0.90\, l_1$	$= -0.016625\, l_1$

Las ordenadas del segundo tramo no aparecen todas en las tablas; pueden obtenerse sin embargo con los elementos que ellas contienen de dos maneras:

La fórmula (11)

$$M_a = M_1 \frac{a}{l_1}$$

(reemplazando x por a para usar la notacion de Cart i Portes) que da el momento en una seccion a del primer tramo cuando P recorre el segundo, nos da un medio espedito para calcular esas ordenadas.

En efecto la fig. (18) es el lugar instantáneo de momentos para una posicion cualquiera de P en el segundo tramo.

$$a\,a' = M_a = \frac{\overline{oa}}{\overline{01}} \times \overline{m1}$$

Se desprende de la fórmula (11) i de la figura. Tratándose de líneas de influencia en las cuales $P = 1$, M_1 es la ordenada de la línea de influencia de momentos en 1 para la colocacion de P que se considera en el segundo tramo i $\frac{a}{l_1}$ siendo $a = 0.30\, l_1$, vale 0.3 simplemente. Luego bastará multiplicar las ordenadas de M_1 (para P en el segundo tramo) por 0.3 si se trata de la seccion $0.30\, l_1$ del primer tramo, por 0.6 si esa es la seccion a, etc. para tener las ordenadas correspondientes al segundo tramo.

Se pueden tener tambien esas ordenadas, aprovechando la otra parte de las tablas en que se encuentran las ordenadas de líneas de influencia para secciones vecinas al tramo cargado («Ordonnées des lignes d'influence relatives à des sections faites dans une travée voisine de la travée chargée»).

Aparecen, sin embargo, solamente las ordenadas correspondientes a las secciones 0.10 i 0.90 l_1 (cuando el tramo cargado es l_2). Es decir, los valores rr' i ss' de la fig. (18); una simple interpolacion lineal formando la diferencia $s's''$ i calculando $a'a''$ permitirá conocer tambien inmediatamente aa' que es la ordenada que se busca.

Calculemos por los dos métodos la ordenada correspondiente, para P colocada en la absisa $x = 0.40\ l_2$ (del segundo tramo) por ejemplo:

Seccion $a = 0.30\ l_1$

1.° $$y = +0.30 \times 0.081745\ l_1 = +\underline{0.0245235\ l_2}$$

2.°

para $$a = 0.90\ l_1 \text{ i } x = 0.40\ l_2, \quad y = +0.073571\ l_2$$
$$a = 0.10\ l_1 \text{ i } x = 0.40\ l_2, \quad y = +\underline{0.008175\ l_2}$$

$$\text{Diferencia corresp. a } \underline{0.8\ l_1} \qquad = \underline{+0.065396\ l_2}$$

$$\text{a } \underline{0.10} \text{ corresp. } 1/8 \qquad = +0.0081745\ l_2$$

luego

$$y = +0.008175\ l_2 + 2 \times 0.0081745\ l_2$$
$$y = +\underline{0.024524\ l_2}$$

Procediendo con uno u otro método se obtienen las demas ordenadas del segundo tramo.

Seccion $a = 0\ 30\ l_1$

P en el segundo tramo

Absisa de la fuerza P	Ordenada de la línea de influencia	
$x = 0.10\ l_2$	$y = +0\ 011991\ l_2$	
$= 0.20\ l_2$	$= +0.019659\ l_2$	
$= 0.30\ l_2$	$= +0.023631\ l_2$	
$= 0.3825\ l_2$	$= +0.024561\ l_2$	max.
$= 0.40\ l_2$	$= +0.024525\ l_2$	
$= 0.50\ l_2$	$= +0.022959\ l_2$	
$= 0.60\ l_2$	$= +0.019557\ l_2$	
$= 0.70\ l_2$	$= +0.014940\ l_2$	
$= 0.80\ l_2$	$= +0.009729\ l_2$	
$= 0.0 0\ l^2$	$= +0\ 004542\ l_2$	

Las ordenadas del tercer tramo tampoco se encuentran directamente en la tabla. Es fácil deducirlas si se recuerda la fórmula (11) (reemplazando x por a).

$$M_a = M_1 \frac{a}{l_1}$$

para la seccion $a = 0.30\ l_1$

$$M_{0.30\,l_1} = M_1 \frac{0.30\,l_1}{l_1} = 0.30\ M_1$$

De aquí que basta multiplicar las ordenadas del momento en el apoyo *1* por la razon entre la absisa de la seccion que se considera i la luz l_1 para tener las ordenadas que se buscan.

Recordando lo que se ha dicho anteriormente, se deberán tomar las ordenadas del apoyo *2* leidas de 0.90 a $0.10\ l_1$ i multiplicadas por *0.30*. Para *P* colocada en $0.40\ l_3$ por ejemplo, resulta:

$$y = -0{,}30 \times 0.0256721\ l_1 = \underline{-0.007702\ l_1}$$

En la misma forma se obtienen las demas ordenadas que contiene el siguiente cuadro:

Seccion $a = 0.30\, l_1$

P en el tercer tramo

Absisa de la fuerza *P*	Ordenada de la línea de influencia
$x = 0.10\ l_1$	$y = -0.003430\ l_1$
$= 0.20\ l_1$	$= -0.005776\ l_1$
$= 0.30\ l_1$	$= -0.007160\ l_1$
$= 0.40\ l_1$	$= -0.007702\ l_1$
$= 0.42265\ l_1$	$= -0.007719\ l_1$
$= 0.50\ l_1$	$= -0.007521\ l_1$
$= 0.60\ l_1$	$= -0.006739\ l_1$
$= 0.70\ l_1$	$= -0.005475\ l_1$
$= 0.80\ l_1$	$= -0.003851\ l_1$
$= 0.90\ l_1$	$= -0.001986\ l_1$

En fin si la seccion fuera la 0.40 del segundo tramo por ejemplo: se calcularian las ordenadas del primer tramo interpolando entre los valores apuntados en la tabla («Ordonnées des lignes d'influence relatives à des sections faites dans une travée voisine de la travée chargée») para «*sections dans la 2ᵉ travée*» i con el primer tramo cargado («*Première travée*»).

Las ordenadas del segundo tramo se encuentran directamente en la tabla (Ordonnées des lignes.... relatives à des sections faites dans la travée chargée»), seccion $a = 0.40\ l$ i segundo tramo cargado («Deuxième travée)».

Las ordenadas del tercer tramo se pueden obtener de dos maneras:

En la segunda parte de la tabla *«Ordonnées.... faites dans la travée voisine de la travée chargée»*, *«Section dans la 2ᵉ travée»*, aparecen las ordenadas del primer tramo de la línea de influencia para las secciones $0.10\ l_2$ i $0.90\ l_2$ del segundo tramo. Es fácil ver fig. (19) que estas ordenadas son las mismas del tercer tramo con sólo leerlas de 0.90 a $0.10\ l_1$ para referirlas al apoyo *1* (*2* en el caso que nos ocupa) i corresponden: la seccion $0.90\ l$ de la tabla a la seccion $0.10 l_2$ del segundo tramo i la $0.10\ l$ a la $0.90\ l_2$. La interpolacion lineal entre los valores de la tabla permite conocer inmediatamente las ordenadas que se buscan.

Hé aquí la manera de hacerla: Sea y_1 fig. (20) la ordenada correspondiente a $0\ 10\ l_1$ (0.90 de la tabla), y_2 la que corresponde a $0.90\ l_1$ (0.10 de la tabla) y la ordenada que se busca correspondiente a la seccion x, medida desde y_1, m la distancia de la figura, etc. Trácese $A'\ B'$ paralela a $A\ B$, entónces:

$$m = \frac{y_9 + y_1}{0.80\ l_1}\ x$$

$$y = y_1 + \frac{y_9 + y_1}{0.80\ l_1}\ x$$

pero $x = 0.\ (n-1)\ l_1$, si se designa la absisa de la seccion por una fraccion 0.n de la luz l_1 (referida a la seccion $0.10\ l_1$ resulta $0.\ (n-1)$), luego:

$$y = y_1 + \frac{y_9 + {}_1}{8}\ (n-1)$$

Esta fórmula es jeneral siempre que se tome en el primer término, y_1 con su respectivo signo i el segundo término con el signo de y_9 i todavia que y_1 e y_9 sean de distinto signo (lo que equivale a decir tambien que y_1 debe tomarse en valor absoluto en el numerador del segundo término).

Calculemos por ejemplo, aplicando esa fórmula, una ordenada del tercer tramo para la misma seccion $a = 0.40\ l_2$ del segundo tramo i cuando *P* está en la seccion 0.60 del tercer tramo. La tabla da:

$$y_9 = (i_1 = 0.10\ l) = +0.076599\ l_1$$

$$y_1 = (i_9 = 0.90\ l) = \underline{+0.011456\ l_1} \quad \text{valor absoluto}$$

$$y_9 + y^1 = \underline{+0.088055\ l_1}$$

$$\frac{y_9 + y_1}{8} = \underline{+0\ 011007\ l_1}$$

$$3 \times \frac{y_9 + y_1}{8} = +0.033021\ l_1$$

$$y_1 = -0.011456\ l_1$$

$$y = +0.021565\ l_1$$

Existe todavía otro método para obtener estas mismas ordenadas. Resulta de aplicar directamente la fórmula (16)

$$M_x = M_1 + (M_2 - M_1)\frac{x}{l_2}$$

(x en esta fórmula es la seccion a de las tablas)

Obtenidas las ordenadas de M_1 i M_2 (ya se ha esplicado como), la fórmula precedente nos da las que buscamos. En efecto, para $a = x = 0.40\ l_2$ i P colocado en 0.60 del tercer tramo se tiene:

$$M_2 = +0.087606\ l_1$$

$$M_1 = -0.022463\ l_1$$

$$M_2 - M_1 = +0.110069\ l_1 \qquad \frac{x}{l_2} = \frac{0.40\ l_2}{l_2} = 0.40$$

$$(M_2 - M_1)\frac{x}{l_2} = +0.0440276\ l_1$$

$$M_1 = -0.022463\ l_1$$

$$M_1 + (M_2 - M_1)\frac{x}{l_2} = y = +0.021565\ l_1$$

Es mas cómodo quizá calcular aplicando el primer método i así se han obtenido los valores que se consignan a continuacion:

Seccion $a = 0.40\ l_2$

P en el tercer tramo

Absisa de la fuerza P	Ordenada de la línea de influeucia
$x = 0.10\ l_3$	$y = +0.010976\ l_1$
$= 0.20\ l_3$	$= +0.018485\ l_1$

Absisa de la fuerza P	Ordenada de la línea de influencia	
$=0.30\, l_3$	$= +0.022913\, l_1$	
$=0.40\, l_3$	$= +0.024683\, l_1$	
$=0.42265\, l_3$	$= +0.024704\, l_1$	máximo
$=0.50\, l_3$	$= +0.023867\, l_1$	
$=0.60\, l_3$	$= +0.011565\, l_1$	
$=0.70\, l_3$	$= +0.017521\, l_1$	
$=0.80\, l_3$	$= +0.012323\, l_1$	
$=0.90\, l_3$	$= +0.006353\, l_1$	

En forma análoga pueden obtenerse todas las ordenadas de líneas de influencia para viga de 4 o mas tramos continuos.

RÉGULO ANGUITA G.

(Continuará).

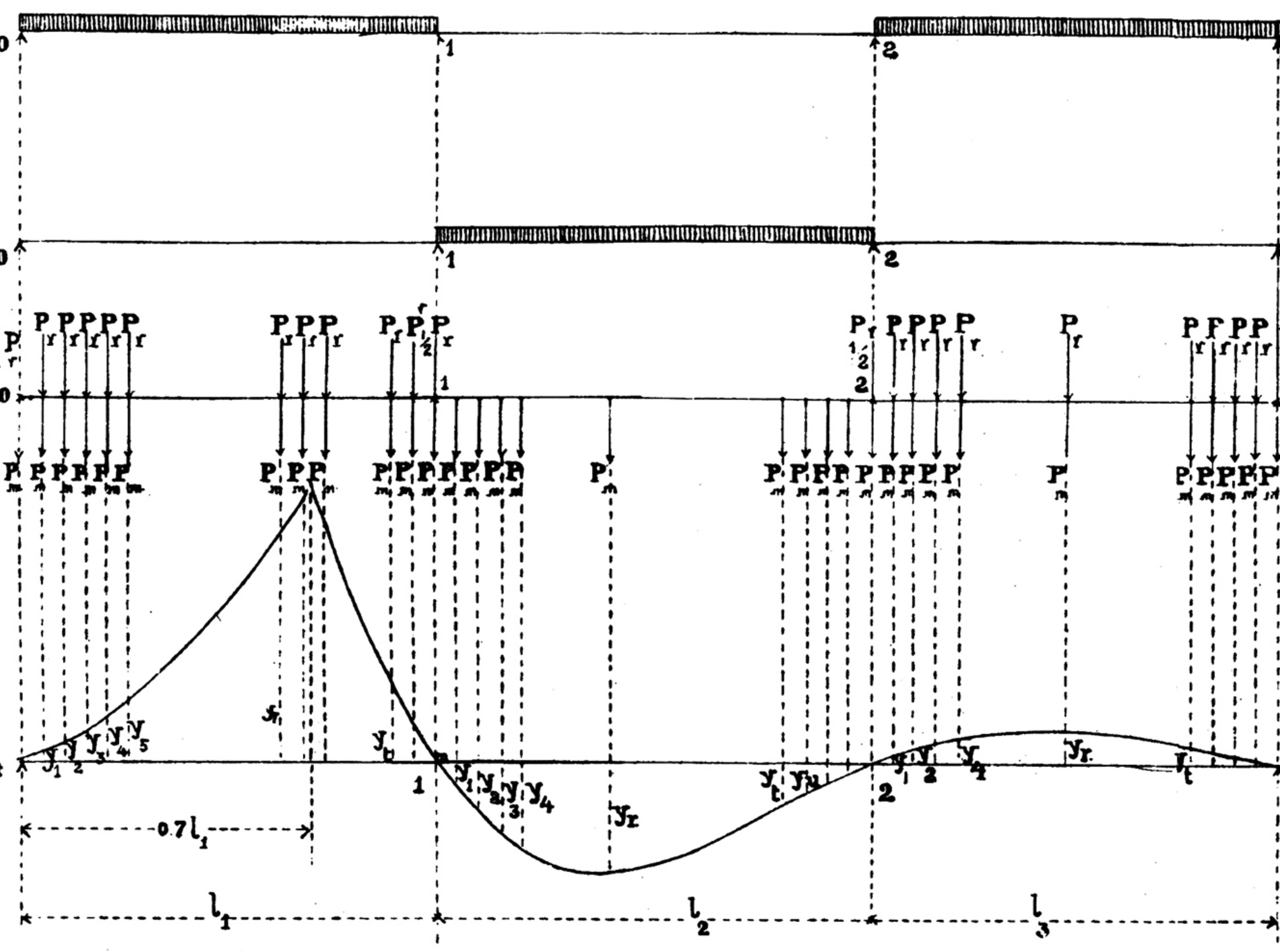

FIG. 21 FIG. 22 FIG. 23 FIG. 24

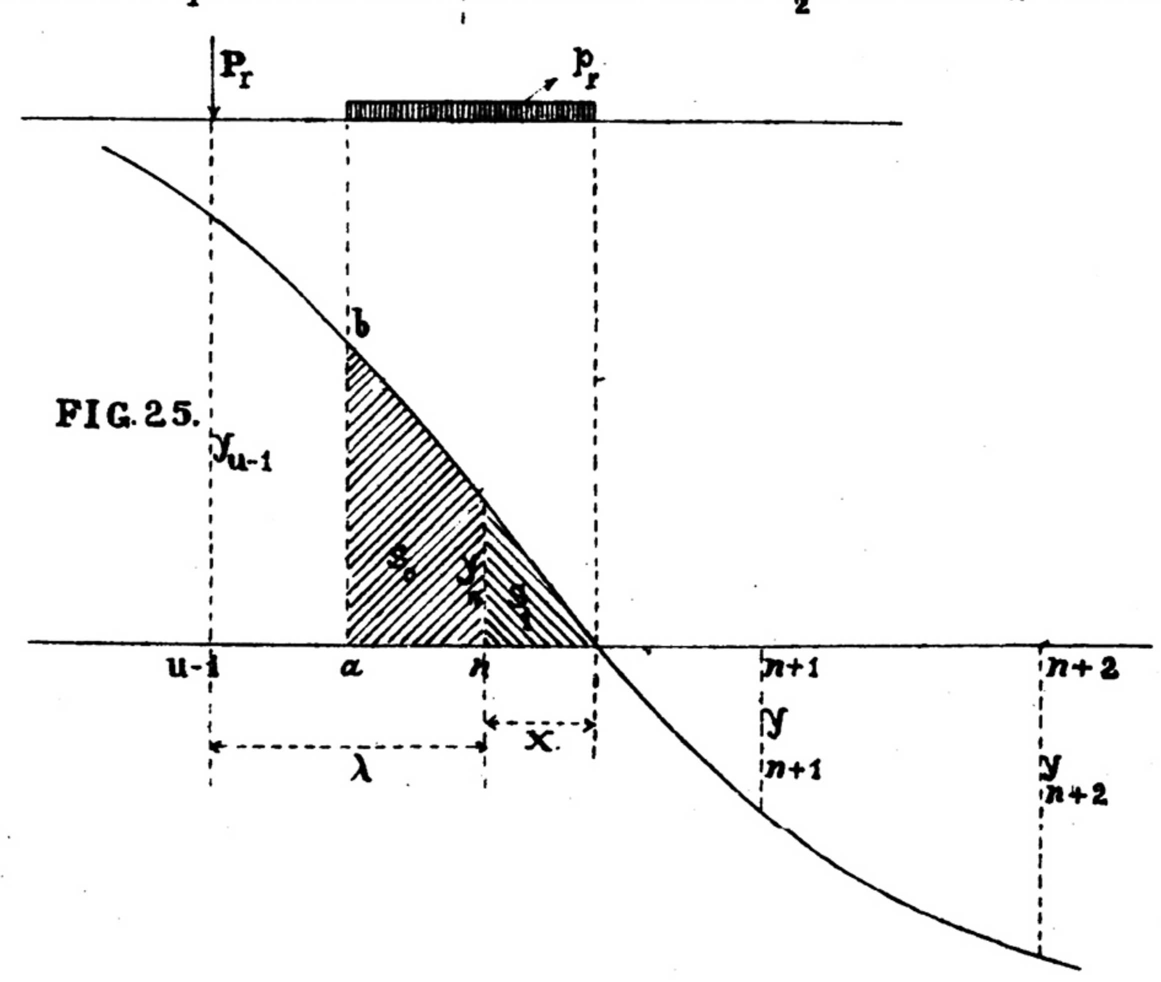

FIG. 25.

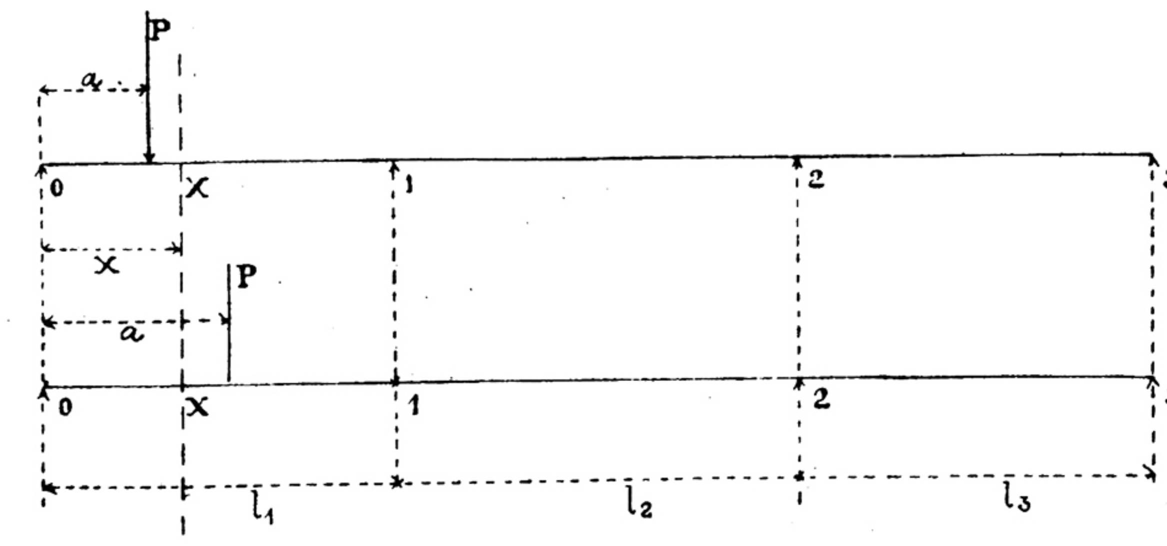

FIG. 26

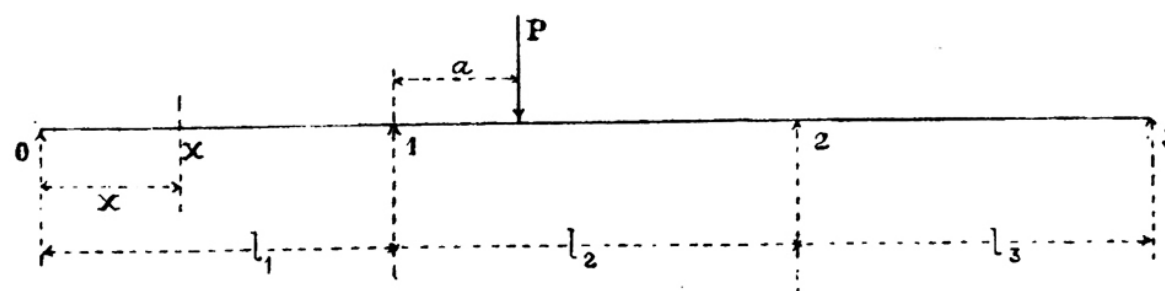

FIG 27

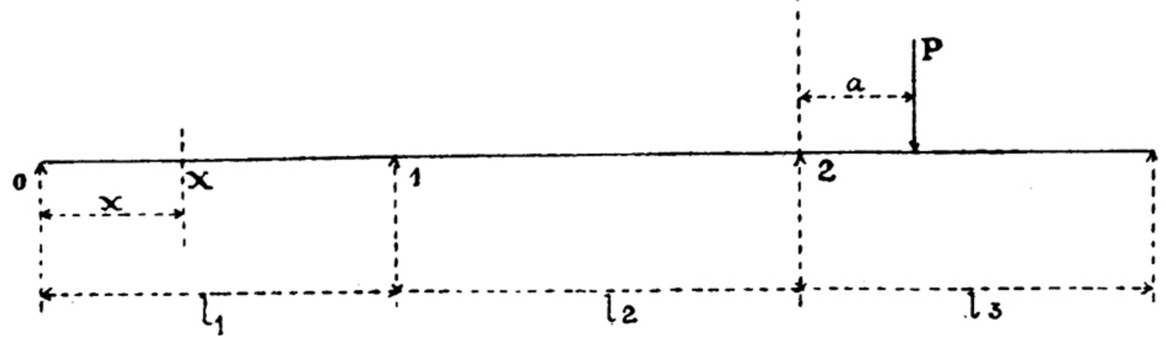

FIG. 28.

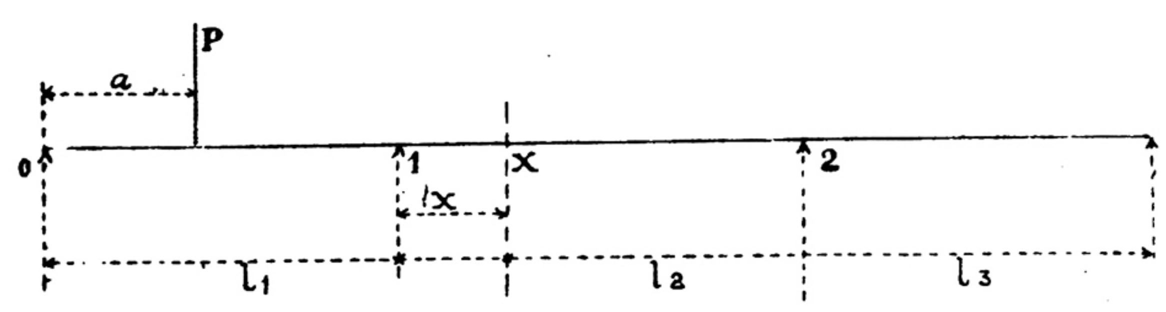

FIG 29.

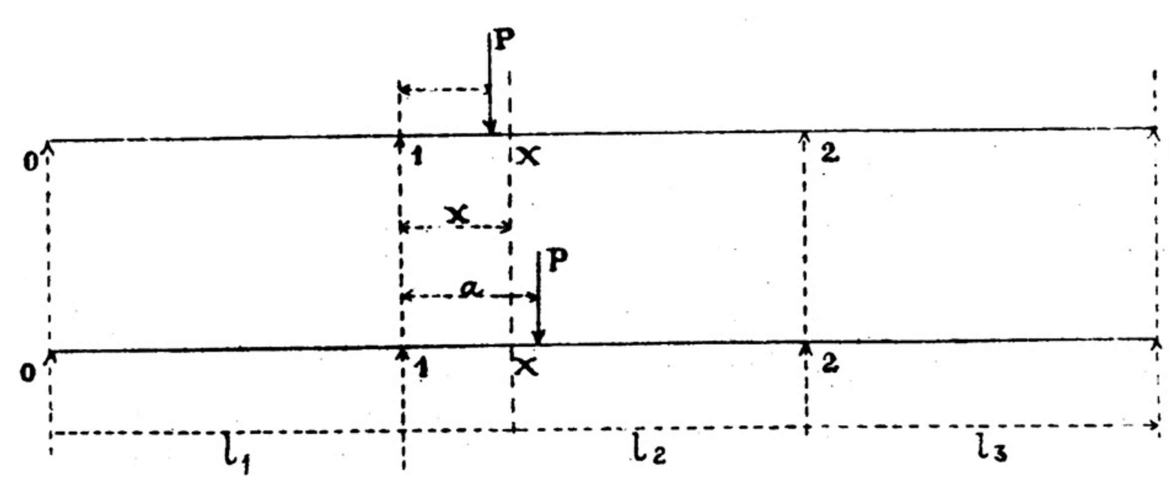

FIG. 30.

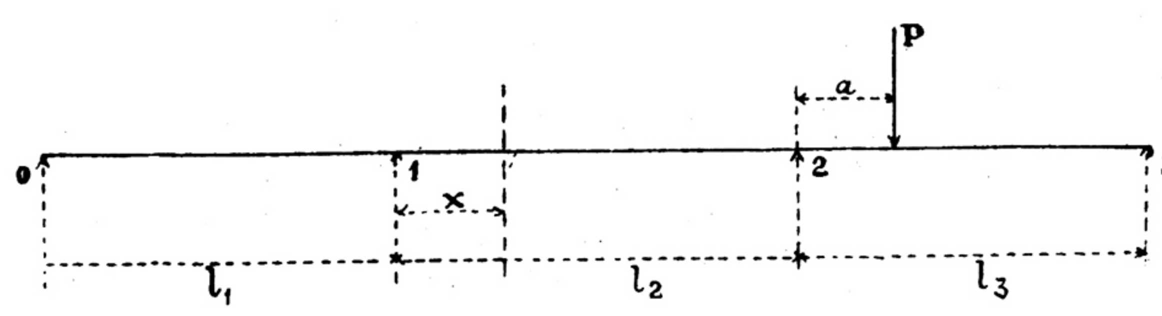

FIG 31

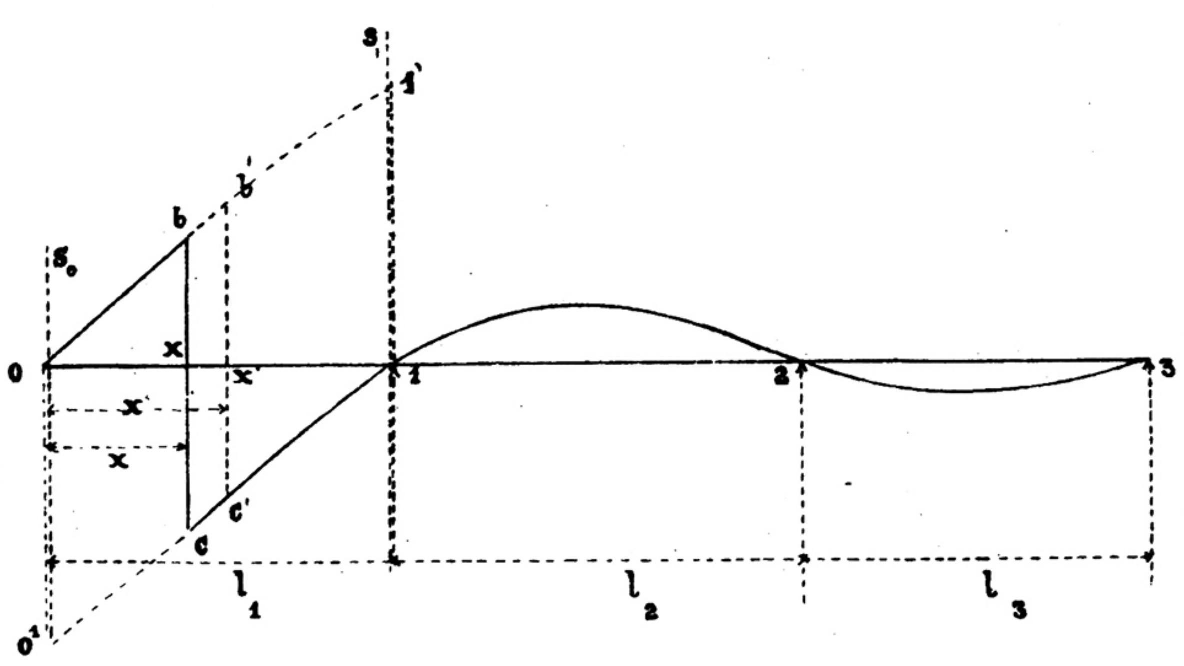

FIG. 32

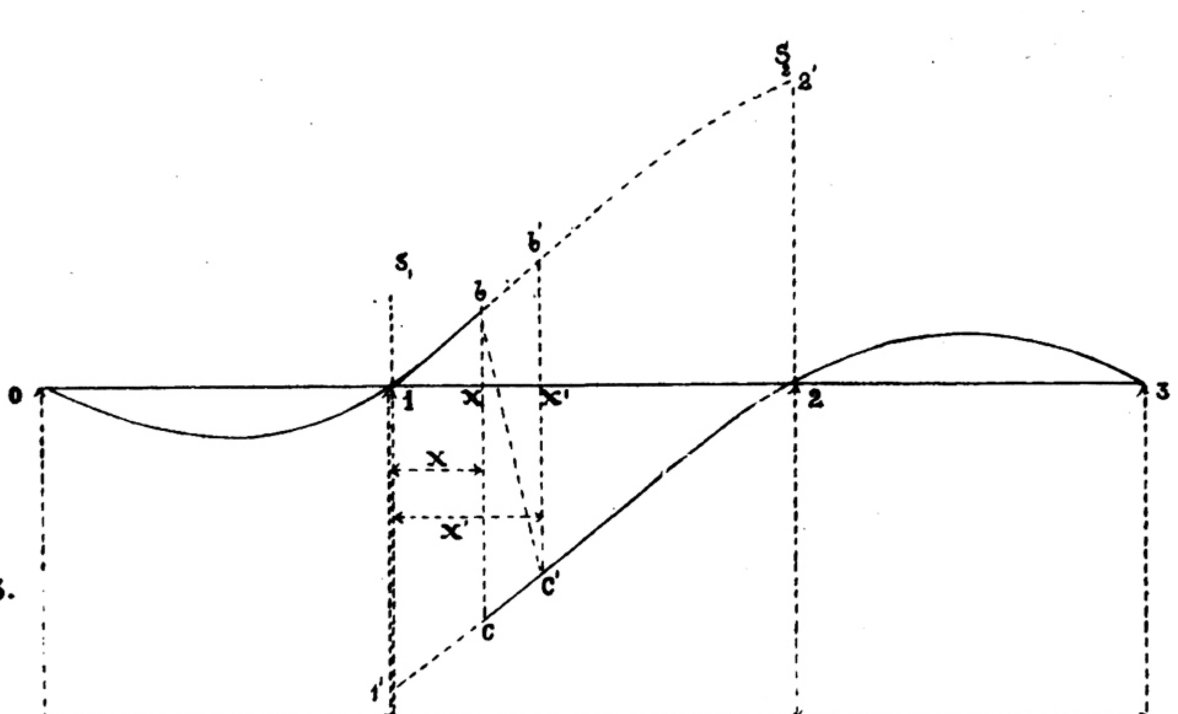

FIG. 33.

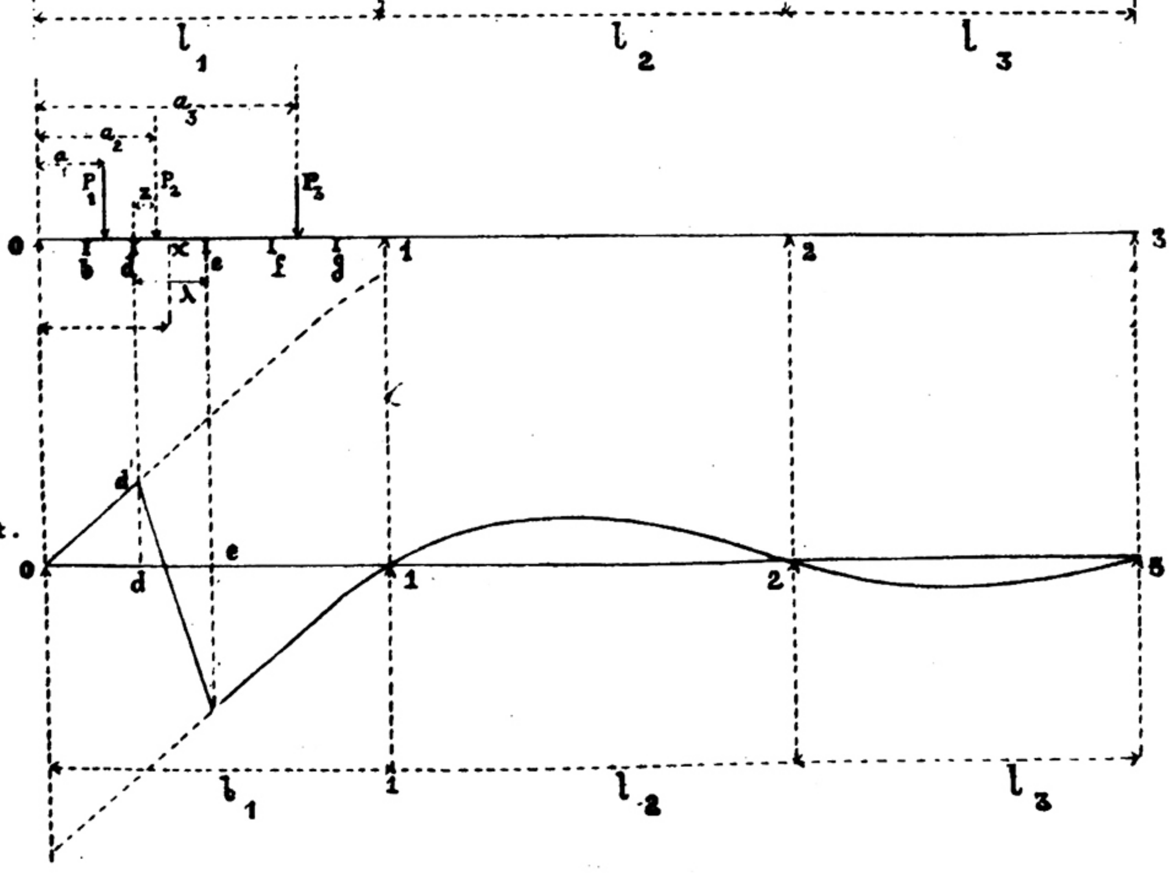

FIG. 34.

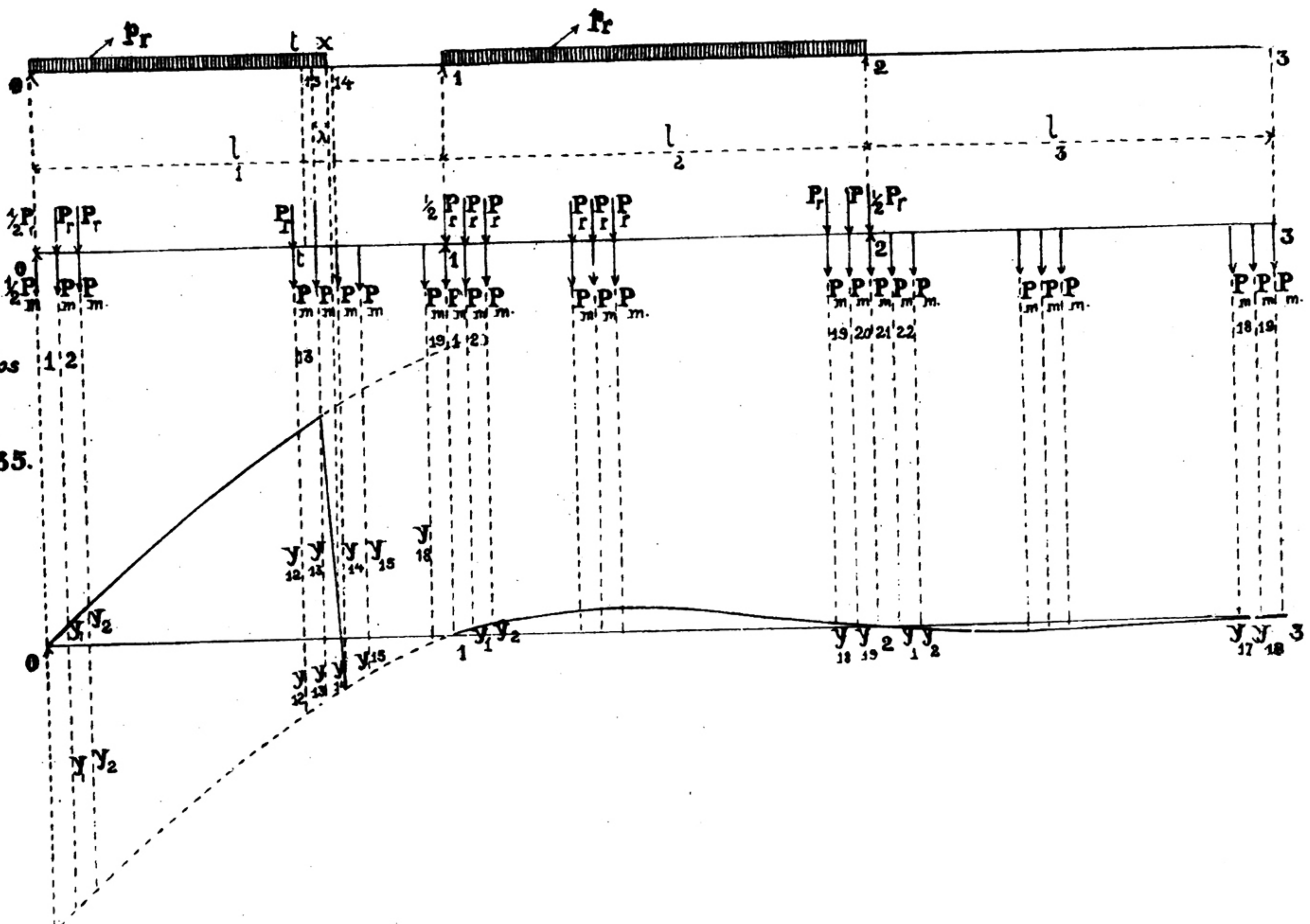

FIG. 35.

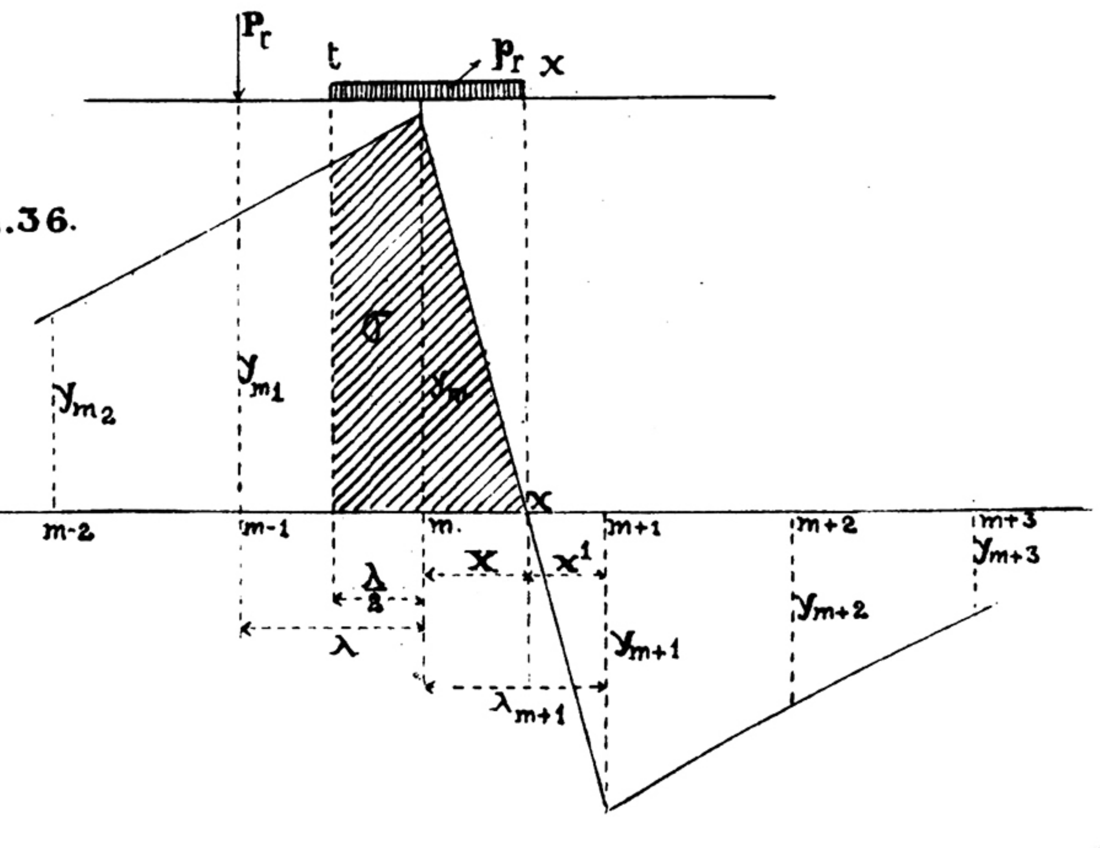

FIG. 36.

Método de las lineas de influencia
R. Anguita.