NUEVO PROCEDIMIENTO GRÁFICO

PARA DETERMINAR EL EMPUJE DE LAS TIERRAS

POR

MANUEL TRUCCO

1.—La determinacion del empuje máximo de las tierras, que interviene en el cálculo de los muros de sostenimiento, se simplifica mucho haciendo uso de procedimientos gráficos. Son numerosas las soluciones de esta naturaleza que se han propuesto, i principalmente son mui conocidas las que se deben a Poncelet. Sin embargo, contínuamente se dan nuevos trazados que tienden a subsanar los inconvenientes que ofrecen los anteriores i a hacer mas cómodas i espeditas las operaciones.

No hace mucho, M. Hisely ha propuesto una nueva série de soluciones gráficas que facilitan notablemente los depurados i que tienen muchas ventajas sobre las anteriormente conocidas. Su autor ha deducido i justifica esas soluciones apoyándose en las propiedades de los sistemas i haces en involucion, demostrando, como base de partida, que *el plano de separacion o de derrumbe del prisma de máximo empuje es uno de los rayos dobles de un haz involutivo del cual se conocen dos pares.*

Tal demostracion es ciertamente mui elegante i jeneral; pero ella requiere conocimientos que por ahora son estraños a los programas de nuestra enseñanza, que suele, no obstante, ser calificada por muchos como recargada en su parte teórica.

Para que nuestros compañeros puedan aprovechar las facilidades de la nueva solucion, he querido darla a conocer; i deseando, al mismo tiempo, evitarles que para justificarla tengan que estudiar especialmente la teoría de los sistemas en involucion, habia pensado dar sobre esta materia los desarrollos indispensables para llegar a las conclusiones de M. Hisely. Posteriormente he logrado encontrar para esos trazados una demostracion bastante sencilla, fundada únicamente en el análisis elemental, que doi mas adelante.

Combinando, como lo hago, la nueva solucion gráfica con parte de las ya conocidas, no solo se demuestra fácilmente la cuestion, sino que se llega tambien a resultados todavía mas espeditos.

Antes de esponer la nueva solucion gráfica i la demostracion elemental que para ella presentamos, se hace necesario recordar la teoría i solucion gráfica de Poncelet para el empuje de las tierras.

TEORÍA DEL EMPUJE DE LAS TIERRAS

2.—*Prisma de máximo empuje.*—Sea AB (fig. 1) el paramento interior de un muro que sostiene un terraplen ABM. Dicho muro debe resistir al empuje que resulta de la tendencia que tiene cierto prisma ABX de resbalar segun el plano de derrumbe AX. En realidad la esperiencia demuestra que la superficie de separacion AX es curva; pero, sin embargo, los resultados son aceptables admitiendo la hipótesis de que dicha superficie es plana.

Consideremos, ademas, al terraplen como un macizo pulverulento, es decir, admitamos que las tierras son desprovistas de cohesion i estudiemos el equilibrio del prisma ABX tomando un metro corrido de muro.

El prisma ABX, en el momento en que estuviera por iniciar su movimiento de resbalamiento, estará en equilibrio bajo la accion de las 3 fuerzas siguientes:

1) Su propio peso P.

2) La reaccion Q de la cara AB del muro.

3) La reaccion R de la cara AX de la parte inmóvil del terraplen.

La primera de estas fuerzas es vertical i su intensidad puede calcularse directamente, dado el prisma ABX.

Vamos a determinar la direccion de las fuerzas Q i R. Podemos descomponer a Q segun una componente Q' normal a AB i segun otra Q'' tanjencial a ese plano. Esta última componente Q'' es debida al frotamiento de las tierras sobre el muro; de modo que si designamos por f' el coeficiente de ese frotamiento tendremos $Q''=f'Q'$.

Descompongamos tambien la reaccion R del plano AX segun una componente R' normal a AX i segun otra componente R'' tanjencial a dicho plano AX. La componente tanjencial R'' representa el frotamiento desarrollado en AX. Si f es el coeficiente de frotamiento de tierras sobre tierras se tiene, en consecuencia, $R''=fR'$.

Designemos por ϕ el ángulo de frotamiento de las tierras sobre si mismas, es decir, el ángulo de inclinacion límite que se puede dar a las tierras para que una de sus partículas no se ponga en movimiento, i designemos por ϕ' el ángulo de frotamiento de las tierras sobre el muro. Así se tiene:

$$f=\text{tanj. } \phi \qquad f'=\text{tanj } \phi'$$

Ahora es fácil ver que la reaccion Q del muro forma con la normal Q' a su paramento interior el ángulo ϕ'. En efecto el triángulo abc (fig. 2), en el cual $ab=Q$, $ac=Q''$ i $cb=Q'$, da:

$$\text{tanj. }(Q,Q')=\frac{Q''}{Q'}=\frac{f'Q'}{Q'}=f'=\text{tanj. } \phi'$$

De la misma manera, se ve que la reaccion R del plano AX forma con la normal a dicho plano un ángulo ϕ.

En otros términos, resulta que Q es perpendicular a la recta AC que forma con AB el ángulo ϕ' i que R es perpendicular a la recta AD que forma con AX el ángulo ϕ.

Conocemos pues en direccion i sentido las tres fuerzas P, Q i R i ademas podemos calcular directamente la intensidad de P; en consecuencia, el triángulo de esas tres fuerzas que se equilibran queda determinado i se tiene (fig. 1).

$$Q=P\frac{\text{sen }(P,R)}{\text{sen }(Q,R)}=P\frac{\text{sen }(\alpha-\phi)}{\text{sen }(\beta+\phi+\phi')} \qquad (1)$$

En esta espresion hemos designado por α el ángulo de inclinacion del plano de derrumbe AX i por β el ángulo del mismo plano con el paramento interior del muro.

Si AX estuviera mui próximo a AB, casi confundiéndose ámbos planos, el peso P del prisma de tierra así determinado i el empuje Q serian mui pequeños. A medida que el ángulo β aumenta de valor aumenta tambien el valor de P; pero va en aumento tambien el frotamiento que se desarrolla en AX, de tal modo que si AX se confunde con AT, cuya inclinacion es precisamente igual al ángulo límite ϕ de rozamiento de tierras sobre tierras, el frotamiento desarrollado seria tal que el prisma ABX permaneceria por sí solo en equilibrio sobre AT, en el supuesto que ABX no se fraccione, es decir, considerando a ABX como de una sola pieza.

Resulta que el empuje es nulo si el plano de separacion AX se confunde con AB i nulo tambien si dicho plano de derrumbe se confunde con el *talud natural de las tierras:* entre estas dos posiciones estremas existirá cierta posicion AX, para la cual se obtiene el empuje máximo, quedando por ella determinado el *prisma ABX de máximo empuje.*

Vamos, pues, a determinar la posicion de AX que limita el prisma de máximo empuje o sea que da para Q el valor máximo.

Para ésto, supongamos (fig. 3) que la posicion AX buscada corte a la superficie o perfil de las tierras en el elemento plano MP. Esta hipótesis no presenta dificultades en la práctica, por cuanto jeneralmente el terraplen queda limitado superiormente por un plano. Por lo demas, si la interseccion X tuviera lugar en el elemento IM, por ejemplo, i no en el MP, se referiria a dicho elemento IM la prolongacion i construcciones que vamos a indicar para MP.

Prolonguemos el elemento MP, sobre el cual se encuentra la interseccion X del plano de derrumbe, hasta cortar en T a la línea AT del talud natural de las tierras, que forma con el horizonte el ángulo ϕ. Prolonguemos tambien MP hácia la izquierda, hasta cortar en L a la recta AL que forma con el paramento interior del muro el ángulo $\phi + \phi'$.

Para reducir el caso jeneral que estudiamos al caso mas sencillo de terraplen plano, tracemos la recta AK de modo que la superficie del triángulo AKX sea equivalente a la superficie $ABGIMX$, lo que se consigue determinando $B'K$ tal que la superficie $AB'K$ sea equivalente a la superficie $B'BGIM$. Si AN es perpendicular a LT, tendríamos:

$$B'K = \frac{2.\ \text{sup}\ B'BGIM}{AN}$$

En la práctica esta determinacion no ofrece dificultades i en muchos casos, como lo veremos, la *recta de compensacion* AK se confunde con el paramento AB del muro.

La recta de compensacion AK es, pues, independiente de la posicion del plano AX, siempre que la interseccion X se mueva sobre el elemento MP.

De este modo el peso P del prisma de máximo empuje $ABGIMX$ será igual al peso del prima triangular AKX, i si π' es el peso del metro cúbico de las tierras, tendremos para 1 metro corrido:

$$P = \pi'.\frac{KX \times AN}{2}$$

I la espresion (1) del empuje será:

$$Q=\pi'.\frac{KX \times AN}{2}.\frac{\text{sen}\ (\alpha-\phi)}{\text{sen}\ (\beta+\phi+\phi')} \qquad (2)$$

Tracemos XZ paralela a AT. El triángulo AXZ dá:

$$\frac{\text{sen}\ (\alpha-\phi)}{\text{sen}\ (\beta+\phi+\phi')}=\frac{AZ}{XZ}$$

La espresion (2) se trasforma entónces en

$$Q=\pi'.\frac{KX \times AN}{2}.\frac{AZ}{XZ} \qquad (3)$$

Si ademas trazamos KF paralela a AT se tiene:

$$\frac{KX}{ZF}=\frac{LT}{LA}$$

Lo que dá:

$$KX=ZF\frac{LT}{LA}$$

I la ecuacion (3) queda:

$$Q=\frac{1}{2}\pi'.\frac{AN \times LT}{AL}.\frac{AZ \times ZF}{XZ} \qquad (4)$$

Pero los triángulos semejantes LZX i LAT dan:

$$XZ=LZ.\frac{AT}{LA}$$

I sustituyendo en (4):

$$Q=\frac{1}{2}\pi'\frac{AN \times LT}{AT}.\frac{ZF \times AZ}{LZ} \qquad (5)$$

Por otra parte, del triángulo ALT se deduce:

$$\frac{LT}{AT}=\frac{\text{sen}\,(TAL)}{\text{sen}\,(ALT)}$$

Del triángulo rectángulo ANL se obtiene:

$$AN=AL\ \text{sen}\ (ALT)$$

Las dos últimas espresiones dan:

$$\frac{AN \times LT}{AT}=AL\ \text{sen}\ (TAL)$$

I sustituyendo en (5):

$$Q=\frac{1}{2}\pi' \times AL \times \text{sen}\ (TAL).\frac{ZF \times AZ}{LZ} \qquad (6)$$

El máximo de Q depende del factor variable

$$\frac{ZF \times AZ}{LZ} \tag{7}$$

Para simplificar las notaciones, hagamos:

$$AL = a, \qquad LF = b, \qquad LZ = x.$$

Entónces:

$$ZF = x - b, \qquad AZ = a - x$$

La fraccion variable (7) podrá escribirse:

$$\frac{(x-b)(a-x)}{x} \tag{8}$$

Espresion que es máxima para

$$x^2 = ab,$$

es decir para

$$\overline{LZ}^2 = AL \times LF. \tag{9}$$

Las construcciones jeométricas elementales que dan la media proporcional LZ, rara vez pueden aplicarse cómodamente en la práctica, puesto que mui frecuentemente los puntos L i T caen fuera de los límites del depurado.

De aquí la ventaja del nuevo procedimiento gráfico, que no presenta las dificultades que acabamos de señalar i que fija la posicion del plano AX que cumple con la condicion (9) i que pasamos a esponer.

NUEVA SOLUCION GRÁFICA

3.—Sea (fig. 4) AB el paramento interior del muro de sostenimiento i $BGIMP$ el perfil del terraplen.

Si se juzga que el plano de derrumbe del prisma de máximo empuje cortará al elemento MP, trazaremos AN *normal* a este elemento MP prolongado convenientemente; en seguida trazaremos *la línea de compensacion* AK, como se ha indicado ántes, es decir, de modo que

$$B'K = 2\,\frac{\text{sup. } B'BGIM}{AN}$$

En realidad, en los casos ordinarios de la práctica estas construcciones se simplifican mucho. Así si el terraplen está limitado superiormente por un plano que pasa por B la línea de compensacion AK se confunde con AB.

Una vez trazadas AN i AK, trazaremos la recta AT que representa el talud natural de las tierras dadas i que forma con el horizonte el ángulo ϕ de frotamiento de dichas tierras sobre sí mismas.

Trazaremos ademas la recta AL, que forma con el paramento AB el ángulo $\phi \times \phi'$, prolongándola hácia el lado de las tierras.

Designamos por ϕ' al ángulo de frotamiento de las tierras sobre el muro.

Con un centro cualquiera O, tomado sobre AN, i con OA por radio, describamos un arco de circunferencia que corta a la línea de compensacion AK en un punto C i al talud natural en un punto D; uniendo estos puntos i prolongando la recta CD que resulta, determinaremos la interseccion S con AL prolongada; por este punto S trazaremos la tanjente SE al arco de circunferencia.

El punto de tanjencia E es un punto del plano de derrumbe AX del prisma de máximo empuje.

DEMOSTRACION

4.—La demostracion elemental que proponemos se reduce a hacer ver que, trazada AX, en conformidad al procedimiento que acabamos de indicar, se verifica la condicion (9)

$$\overline{LZ}^2 = AL \times LF$$

para los puntos Z i F determinados por las paralelas AT trazadas por X i K.

Para comodidad en la demostracion, elijamos los ángulos ϕ i ϕ' de modo que el triángulo LAT se forme dentro de los límites del dibujo (fig. 5) i sea AX la recta determinada segun la construccion indicada por la figura 4.

Tracemos (fig 5) XZ i KF paralelas a AT.

Los triángulos semejantes LZX i LAT dan:

$$LZ = LA\frac{LX}{LT}$$

I los triángulos LZX i LFK:

$$LZ = LF\frac{LX}{LK}$$

Luego:

$$\overline{LZ}^2 = LA \times LF \times \frac{\overline{LX}^2}{LK \times LT}$$

Bastará demostrar que con las construcciones indicadas se tiene

$$\frac{\overline{LX}^2}{LK \times LT} = 1 \qquad (a)$$

Designemos, como ántes, por α el ángulo de AX con la horizontal i por β el ángulo de AX con el muro. Ademas designemos por ϵ i por γ los ángulos de LT i de LA con el horizonte.

Los triángulos LAX, LAK i LAT dan respectivamente:

$$\overline{LX}^2 = \overline{AL}^2 \frac{\text{sen}^2(\alpha+\gamma)}{\text{sen}^2(\alpha-\epsilon)}$$

$$LK = AL\frac{\text{sen}(\phi+\phi')}{\text{sen}(\alpha+\beta-\epsilon)}$$

$$LT = AL\frac{\text{sen}(\phi+\gamma)}{\text{sen}(\phi-\epsilon)}$$

Luego:

$$\frac{\overline{LX}^2}{LK \times LT} = \frac{\operatorname{sen}^2 (\alpha+\gamma) \operatorname{sen} (\alpha+\beta-\epsilon) \operatorname{sen} (\phi-\epsilon)}{\operatorname{sen}^2 (\alpha-\epsilon) \operatorname{sen} (\phi+\phi') \operatorname{sen} (\phi+\gamma)} \qquad \text{(b)}$$

En el triángulo AES tenemos:

Angulo $AES = 90° - AEO = 90° - OAE.$

Pero el ángulo $OAH = 90° + \epsilon.$

Luego:

Ang. $OAE = 90° + \epsilon - \alpha$

I áng. $AES = \alpha - \epsilon$

En consecuencia el triángulo AES nos dá:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 (\alpha+\gamma)}{\operatorname{sen}^2 (\alpha-\epsilon)} = \frac{\overline{ES}^2}{\overline{AS}^2} \qquad \text{(c)}$$

En el triángulo ACS resulta:

Ang. $ACS = AES - EAT = \alpha - \epsilon - (\alpha - \phi) = \phi - \epsilon$

De consiguiente:

$$\frac{\operatorname{sen} (\phi-\epsilon)}{\operatorname{sen} (\phi+\phi')} = \frac{AS}{CS} \qquad \text{(d)}$$

De la misma manera, del triángulo ADS se obtiene:

Ang. $ADS = ACD + CAD = \phi - \epsilon + \beta + \alpha - \phi = \alpha + \beta - \epsilon$

i ademas:

$$\frac{\operatorname{sen} (\alpha+\beta-\epsilon)}{\operatorname{sen} (\phi+\gamma)} = \frac{AS}{DS} \qquad \text{(e)}$$

Introduciendo los valores *(c)*, *(d)* i *(e)* en *(b)*:

$$\frac{\overline{LX}^2}{LK \times LT} = \frac{\overline{ES}^2}{CS \times DS} = 1$$

Que era lo que se deseaba demostrar. Con esta demostracion, que era lo que perseguíamos, podíamos dar por terminado este estudio; sin embargo, creyendo que pueda ser útil, facilitando las aplicaciones, vamos a completarlo con algunas líneas mas.

5.—CÁLCULO DEL EMPUJE MÁXIMO

a).—Hemos visto que el empuje es dado por la espresion (1) del párrafo 2:

$$Q = P \frac{\operatorname{sen} (\alpha-\phi)}{\operatorname{sen} (\beta+\phi+\phi')} \qquad (1)$$

Para tener el valor máximo de Q, que es el que interviene en el cálculo de los muros, bastaria determinar por el procedimiento que hemos indicado la posicion de AX i calcular el peso P del prisma KAX con sus sobrecargas; llevarlo, a cierta escala, sobre el talud natural, en Ap (fig. 5); trazar pq paralela a AS i esta lonjitud pq, a la misma escala de los pesos, será el empuje máximo, puesto que ella verifica la espresion (1).

Como aplicacion tomemos un caso frecuente en la práctica.

Sea (fig. 6) un muro AB que debe sostener un terraplen limitado superiormente por un plano AX i sobrecargado uniformemente con π'' kgs. por m².

En este caso la línea de compensacion coincide con AB.

Designemos por π' el peso del metro cúbico de las tierras.

Para facilitar los cálculos, trasformemos la sobrecarga π'' en un espesor equivalente de tierras. Este espesor, en metros, será:

$$e = \frac{\pi''}{\pi'}$$

Doblemos este espesor, como lo hace M. Hisely, i sea $B'X'$ la línea de la sobrecarga doble así obtenida.

Tracemos la normal AN' a $X'B'$. Con un centro cualquiera elejido sobre esta normal describamos un arco que pase por A i que determina las intersecciones C i D con las cuales se fijan los puntos S i E i, en consecuencia, el plano de derrumbe AX del prisma de máximo empuje.

El valor de P es el peso P' del prisma ABX mas sus sobrecargas P'', limitada por las verticales BB'' i XX''.

Tenemos:

$$P' = \pi' \times \frac{1}{2} AN \times BX$$

$$P'' = \pi' \times \frac{1}{2} NN' \times BX$$

$$P = P' + P'' = \frac{1}{2} \pi' \times AN' \times BX$$

Bastaria medir a escala en el depurado las lonjitudes AN' i BX e introducirlas en la última espresion para tener el valor de P.

Calculado P, lo llevaríamos a cierta escala de fuerza, en Ap. La recta pq paralela a AS nos dará a la escala de las fuerzas el empuje máximo.

En el caso de la fig. 6 hemos hecho:

$$\text{altura del muro: } h = 5 \text{ m.}$$

$$\phi - 39^\circ \qquad \phi' = 30^\circ$$

$$\pi' = 1600 \text{ k. por m.}^3 \qquad \pi'' = 2000 \text{ k. por m.}^2$$

Luego:

$$e = \frac{\pi''}{\pi'} = \frac{2000}{1600} = 1,25 \text{ m.}$$

$$h' = 2\,e = 2,50 \text{ m.}$$

El depurado da:

$$AN' = 12,70 \text{ m. i } BX = 7,50 \text{ m.}$$

En consecuencia:

$$P = 800 \times 12{,}70 \times 7{,}50 = 76200 \text{ kg.}$$

Lo que dá:

$$Q_{\text{máx}} = pq = 33 \text{ t.}$$

b).—Otra determinacion del empuje máximo se deduce de las consideraciones que siguen:

Determinada la posicion AX del prisma de máximo empuje, si trazamos (figura 5) XZ i KF paralelas a AT tenemos:

$$\frac{LF}{LZ} = \frac{LK}{LX}$$

I la espresion (9) del núm. 2 da:

$$\frac{LF}{LZ} = \frac{LZ}{AL}$$

Lo que indica que la recta KZ es paralela al plano de derrumbe AX del prisma de máx. empuje; de lo cual se deduce otro medio de determinar la lonjitud AZ.

El triángulo ZAX da:

$$AX = AZ \frac{\text{sen } (\phi + \gamma)}{\text{sen } (\alpha - \phi)}$$

En el caso de la figura 6 la línea de compensacion es AB'; de modo que trazando por B i B' las rectas BZ i $B'Z'$ a AX' tendremos:

$$AX' = AZ' \frac{\text{sen } (\phi + \gamma)}{\text{sen } (\alpha - \phi)}$$

La espresion (1) daba:

$$Q_{\text{máx}} = P \frac{\text{sen } (\alpha - \phi)}{\text{sen } (\beta + \phi + \phi')}$$

Ademas se tenia:

$$P = \frac{1}{2} \pi \times AN' \times BX$$

Pero:

$$AN' = AX' \text{ sen } (\alpha - \epsilon)$$

I reemplazando a AX':

$$AN' = AZ' \frac{\text{sen } (\phi + \gamma)}{\text{sen } (\alpha - \phi)} \text{ sen } (\alpha - \epsilon)$$

Si por B trazamos BZ_1 paralela AL tenemos:

$$AZ = BZ_1$$

Del triángulo BZ_1X se obtiene:

$$BX = AZ \frac{\text{sen } (\beta + \phi + \phi')}{\text{sen } (\alpha - \epsilon)}$$

Sustituyendo estos valores encontrados tenemos:

$$Q_{\text{máx}} = \pi' \times \frac{1}{2} AZ \times AZ' \times \text{sen}\,(\phi + \gamma)$$

Si sobre AT tomamos $AU = AZ$ i sobre AS tomamos $AU' = AZ'$, la superficie Ω del triángulo AUU', así construido, es igual a $\frac{1}{2}\ AZ \times AZ' \times \text{sen}\ (\phi + \gamma)$; luego:

$$Q_{\text{máx}} = \pi' \times \Omega$$

Podríamos tambien con los elementos AZ i AZ' construir el triángulo sobre las rectas AL i AT.

El peso de un prisma de tierra que tenga ese triángulo por base es igual al empuje máximo. Bastaria, pues, en el triángulo AUU' medir la base $b = UU'$ i la altura a, para tener

$$Q_{\text{máx}} = \frac{1}{2} \pi' \ a\ b$$

Los valores de AZ i AZ' pueden obtenerse tambien en BZ_1 i $B'Z'_1$.

Cuando no hai sobrecargos, el valor de AZ' es igual a AZ i el triángulo AUU' es isósceles.

Sin error apreciable puede considerarse la sobrecarga no limitada por la vertical XX'' sino como una capa *efectiva* de tierra, quedando entónces limitada por la prolongacion de AX.

En este caso se procederia, como ántes, a determinar el espesor e de tierra, equivalente a la sobrecarga dada. Tomando los mismos datos anteriores encontramos:

$$e = 1.25 \text{ m.}$$

Trazaremos (figura 7) la recta $B'X'$, de la sobrecarga *efectiva*, paralela al terraplen BX, existiendo entre ámbas una distancia vertical igual a e. Fijaremos la posicion de AX; i la distancia $AZ = B'Z_1$, que corresponde al límite $B'X'$ es el lado del triángulo AUU' que en este caso es isósceles.

La figura (7) dá:

$$a = 6.80 \text{ m.} \quad b = 6.10 \text{ m.}$$

$$Q_{\text{máx}} = \frac{1}{2} \times 1600 \times 6.80 \times 6.10 = 33184 \text{ kgs.}$$

La altura del muro i el valor de los ángulos dados se han tomado en la figura 7 iguales a los de la figura 6.

6.—Con los trazados anteriores es fácil determinar el empuje a diferentes alturas del muro; puesto que los planos de derrumbe que corresponden a esas diversas alturas son paralelos, estableciéndose fácilmente la proporcionalidad entre los empujes respectivos.

CENTRO DE EMPUJE

7.—Para determinar el punto de aplicacion del empuje, es bastante espedito, en el caso de terraplen plano i sobrecarga uniformemente repartida, el siguiente procedimiento que tomamos de los *Annales des Ponts des Chaussées*, de 1899:

Sea (fig. 8) AB el muro que sostiene un terraplen plano; $B'X'$ la línea que limita la sobrecarga uniformemente repartida, sustituida por una capa equivalente de tierra i sea AX' la posicion del plano de derrumbe del prisma de máximo empuje.

Designemos por β el ángulo que forma AX' con el muro AB.

El empuje parcial q que actúa sobre un elemento cualquiera mn es proporcional a la superficie del trapecio $mnX'_1X'_2$ que representa la diferencia de los prismas limitados por los planos de derrumbes que pasan por m i por n, puesto que los dos paralelógramos que tienen por base a X_1X_2 son equivalentes. Si hacemos $mn=s$ i designamos por l la mediana, la superficie del trapecio será:

$$l \times s . \operatorname{sen} \beta$$

Como β es constante, resulta que el empuje en un elemente s es proporcional al producto ls. Si hacemos s igual a la unidad (tomándose esta unidad tan pequeña como se quiera) tendremos que el empuje por unidad de superficie en un punto cualquiera M del muro es proporcional a la base l de un triángulo que tiene su vértice en B'; pudiéndose, en consecuencia, representar esos empujes por una recta cualquiera CD que pasa por B' i medirlos segun una direccion arbitraria AD.

Determinando el centro de gravedad G, del trapecio $ABCD$, proyectándolo segun la direccion AD tendremos el centro de empuje E para el muro total AB.

8.—Los procedimientos anteriores nos permiten determinar rápidamente la intensidad i el centro de empuje sobre un muro de paramento interior rectilíneo.

Cuando este paramento interior es poligonal o en escalones se adoptan consideraciones especiales que en ámbos casos permiten reducirlo al tipo de paramento rectilíneo. Estas hipótesis o consideraciones se encuentran en todos los tratados de estabilidad, por lo que juzgamos innecesario detenernos sobre ellos.

Igualmente en esas obras o en los formularios se encuentran los valores de ϕ para las diversas clases de tierras. Sin embargo, respecto a este punto conviene en lo posible proceder por esperiencia directa sobre las tierras que se han de emplear.

El valor de ϕ' se toma por lo jeneral igual a ϕ en atencion a que ordinariamente el paramento del muro que se encuentra en contacto con las tierras es irregular, no cuidado; de modo que el ángulo de rozamiento de las tierras sobre esa superficie áspera es mayor que el ángulo de rozamiento de las tierras sobre sí mismas, admitiéndose, por ésto, que, debido a las rugosidades de la pared, queda adherida a ella una pequeña capa de tierras interviniendo entónces, tambien a lo largo del muro, el rozamiento de tierras sobre tierras.

Cuando el paramento interior es pulido, el valor de ϕ' es menor que el de ϕ.

Como se ha visto, la direccion del empuje forma con la normal al muro un ángulo ϕ'.

Con esos elementos puede determinarse el perfil del muro, para lo cual los formularios o los tratados especiales dan las fórmulas teóricas o empíricas que proporcionan esas dimensiones. Con este mismo objeto, Poncelet i otros han calculado tablas que dan los espesores de los muros de sostenimiento para los casos mas frecuentes.

En todo caso, esos espesores deben ser verificados convenientemente para comprobar la seguridad i economía que con ellos se obtiene, empleándose, con tal objeto, el método de los coeficientes de estabilidad o, lo que es mas usual i espedito, el método de las curvas de presiones o procedimiento de Moseley, que se esplica en todos los cursos de estabilidad.

Santiago, Noviembre de 1901.