PROYECTO DE PUENTE SOBRE EL RIO ITATA

(Continuacion)

CAPÍTULO III

Cálculo de las vigas principales

PESO MUERTO I SOBRECARGA

Los arcos que sirven de vigas al puente presentan la disposicion indicada en la fig. 19; allí las piezas aparecen representadas por sus ejes neutros. El arco es simétrico con relacion a su seccion vertical en la clave. El empotramiento de sus arranques se verifica segun AO'O e IF'F.

Para el cálculo debemos, pues, tener en cuenta que se trata de una pieza curva, de bridas no paralelas, empotrada en sus estremos.

Examinaremos sucesivamente la influencia de las diversas acciones que obran sobre las vigas.

Peso muerto i sobrecarga

§ I.—Ecuaciones jenerales

Hemos dicho que solo estudiaremos el caso de una carga uniforme; prescindiremos, ademas, por el momento, del peso propio de la pieza i consideraremos los dos casos de sobrecarga mas desfavorables:

a) Sobrecarga que se estiende sobre la lonjitud de un medio arco;

b) Sobrecarga que cubre la totalidad de la pieza.

a) La sobrecarga se estiende sobre la media lonjitud del tramo, desde A hasta D. —Cortemos el arco por el plano vertical que pasa por su seccion C D en la llave i aislemos los dos medios arcos, como aparece indicado en la fig. 20, en la cual cada uno de ellos está referido a dos ejes coordenados.

La reaccion del trozo de la derecha sobre el de la izquierda es una fuerza Q, aplicada en un punto G de la seccion C D; la reaccion del trozo de la izquierda sobre el de la derecha es una fuerza igual i de sentido contrario a Q.

Sean Δx_1 i Δy^1 las componentes del desplazamiento de D con relacion a A, i α_1 la variacion angular de la seccion CD. Sean $\Delta x'_1$, $\Delta y'_1$ i α'_1 las cantidades correspondientes para el trozo de la derecha. Como el punto D i la seccion DC pertenecen simultáneamente a ámbos trozos, es evidente que

$$\Delta x_1 = -\Delta x'_1 \qquad (a)$$
$$\Delta y_1 = \Delta y'_1 \qquad (b)$$
$$\alpha_1 = -\alpha'_1 \qquad (c)$$

Estas serán las ecuaciones jenerales de que haremos uso en los cálculos que siguen.

Determinacion de Δx_1, Δy_1 i α_1

Estos valores resultan de la deformacion de las bridas AD i OC. Estudiemos primero las deformaciones de la brida superior AD.

Consideremos un punto H cualquiera de esta brida i sean:

T=fatiga por unidad de superficie.
E=coeficiente de elasticidad del material de la brida.

El alargamiento de un trozo infinitamente pequeño dx, contado a partir de este punto H, será

$$\frac{T}{E}dx$$

Este alargamiento (positivo o negativo) se produce segun la direccion A D, i provoca en el conjunto de la pieza una rotacion infinitamente pequeña cuyo centro está situado sobre la normal HK a AD i se encuentra en K, punto de interseccion de esta normal con la brida inferior. El ángulo de dicha rotacion valdrá

$$\frac{T\,dx}{E \times HK} = \frac{T}{E.\,h}dx$$

haciendo HK=h.

Por efecto de la rotacion, el punto D irá a D_1:

$$\text{Ángulo } DKD_1 = \frac{T}{E.\,h}dx$$

i tendremos:

$$ND_1 = dx_1$$
$$DN = dy_1$$

Llamemos ademas:

x, y=coordenadas de un punto cualquiera de la curva de intradós,
f=flecha
$h=f-y$

Los triángulos semejantes KJD i DND_1 dan:

$$ND^1 = DJ \times \frac{DD_1}{KD}$$

es decir

$$dx_1 = \frac{T}{E.\,h}(f-y)\,dx.$$

i como

$$h=f-y$$

$$dx_1=\frac{T}{E}dx \tag{1}$$

Llegamos, como se ve, a obtener para D una traslacion segun las X igual al alargamiento horizontal del elemento dx en el punto H, lo que, por otra parte, era evidente.

Tenemos tambien:

$$D\,N=K\,J\times\frac{D\,D_1}{K\,D}$$

$$dy_1=\frac{T}{E.\,h}(L-x)\,d\,x \tag{2}$$

Ademas

$$\text{ángulo } D\,K\,D_1=da_1$$

$$da_1=\frac{T}{E\,h}dx \tag{3}$$

Las ecuaciones (1), (2) i (3) nos dan los desplazamientos del punto D i la rotacion de la seccion D C por efecto de la fatiga que se produce en un punto cualquiera de la brida superior A D; los desplazamientos i rotacion totales valdrán:

$$\Delta\, x_1=\frac{1}{E}\int_A^D T\,dx \tag{4}$$

$$\Delta\, y_1=\frac{1}{E}\int_A^D \frac{T}{h}(L-x)\,dx \tag{5}$$

$$a_1=\frac{1}{E}\int_A^D \frac{T}{h}dx \tag{6}$$

Determinemos ahora los valores de $\Delta\, x_1$, $\Delta\, y_1$ i a_1 correspondientes al punto D i a la seccion D C por efecto de la deformacion de la brida inferior.

Consideremos un elemento infinitamente pequeño ds en un punto L de esta brida i llamemos, como ántes:

T=fatiga por unidad en L.

E=coeficiente de elasticidad.

La variacion de lonjitud del elemento ds será:

$$\frac{T}{E}\,ds$$

De aquí resulta, para la porcion de la pieza a la derecha de L, una rotacion de centro V, punto en que la normal a la brida inferior corta a la brida superior. Llamemos:

$L\,V=h'$

x', y'=coordenadas de un punto cualquiera de la línea A D.

Siendo V el centro de rotacion i V D paralela al eje de las x, el desplazamiento de D en el sentido horizontal es nulo i este desplazamiento horizontal de D será nulo para la deformacion de toda la brida inferior.

Como el ángulo de la rotacion de centro V es

$$\frac{T'}{E\,h'}\,ds$$

es fácil ver que:

$$\Delta\, y_1 = \frac{1}{E}\int_A^D \frac{T'}{h'}\,(L-x')\,ds \qquad (7)$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{E}\int_A^D \frac{T'}{h'}\,ds \qquad (8)$$

De aquí deducimos, para los valores totales de $\Delta\, x_1$, $\Delta\, y_1$ i α_1, debidos a las deformaciones de las dos bridas:

$$\Delta\, x_1 = \frac{1}{E}\int_A^D T.\,dx \qquad (9)$$

$$\Delta\, y_1 = \frac{1}{E}\int_A^D \frac{T}{h}(L-x)\,dx + \frac{1}{E}\int_A^D \frac{T'}{h'}(L-x')\,ds. \qquad (10)$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{E}\int_A^D \frac{T}{h}\,dx + \frac{1}{E}\int_A^D \frac{T'}{h'}\,ds. \qquad (11)$$

El valor de $\Delta\, y_1$ es negativo.

Podemos ahora dar a estas espresiones otra forma; llamemos:

M i M' = momentos de las fuerzas esteriores con relacion a los centros de rotacion K i V.

Ω i Ω' = secciones de las bridas superior e inferior, que admitiremos constantes para cada una de ellas, como en realidad lo son en nuestro proyecto.

$T\,\Omega\,h$ i $T'\,\Omega'\,h'$ = momentos resistentes de esas bridas.

Tendremos:

$$M = T\,\Omega\,h$$

$$M' = T'\,\Omega'\,h'$$

de donde:

$$T = \frac{M}{\Omega.\,h}$$

$$T' = \frac{M'}{h'.\,\Omega}$$

reemplazando en (9), (10) i (11), tendremos:

$$\Delta x_1 = \frac{1}{E\,\Omega} \int_A^D \frac{M}{h}\, dx. \tag{12}$$

$$\Delta y_1 = \frac{1}{E\,\Omega} \int_A^D \frac{M}{h^2} (L-x)\, dx. + \frac{1}{E\,\Omega'} \int_A^D \frac{M'}{h'^2} (L-x')\, ds \tag{13}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{E\,\Omega} \int_A^D \frac{M}{h^2}\, dx. + \frac{1}{E\,\Omega'} \int_A^D \frac{M'}{h'^2}\, ds. \tag{14}$$

El valor de h' sujiere una observacion, para los puntos de la brida inferior situados a la izquierda del punto B en que corta a esta brida la normal bajada a ella desde A. Por efecto de la deformacion del elemento ds, el punto E se desplaza segun la tanjente E T a la brida i provoca una rotacion de la fraccion de pieza situada a la derecha de E. El centro de esta rotacion no estará sobre E U, porque esta línea no encuentra mas que la parte empotrada A O' O de la pieza curva i, por efecto de este empotramiento, los puntos A i O son absolutamente invariables; el centro de rotacion no puede, pues, estar mas que en A, i el radio de rotacion es A Z normal a E T. Para el punto E, se tiene pues:

$$A\,Z = h'$$

Las ecuaciones (12), (13) i (14) nos permiten determinar los valores de $\Delta\, x_1$ $\Delta\, y_1$ i α_1.

Hemos dicho ántes que la reaccion del media arco de la derecha sobre el de la izquierda es una fuerza Q, aplicada a una distancia de D que llamaremos d; descompongamos a Q en sus componentes q i π. Segun esto, las fuerzas que solicitan al medio arco que estudiamos son: una sobrecarga uniforme de p kilos por metro corrido, que se estiende en toda su lonjitud, desde A hasta D

un empuje horizontal q, en la llave,

una reaccion vertical π, en la llave.

Los valores de M i M' que debemos introducir en las ecuaciones (12), (13) i (14) se descompondrán así:

$$M = M_p + M_q + M_\pi$$

$$M' = M'_p + M'_q + M'_\pi$$

hemos dado de índice al momento de cada fuerza la letra que a ésta designa.

Para la sobrecarga uniforme p:

$$M_p = \frac{p\,(L-x)^2}{2}$$

$$M'_p = \frac{p\,(L-x')^2}{2}$$

Para el empuje q en la llave:

$$M_q = -q.\,(d+h)$$
$$M'_q = -q.\,d.$$

Para la reaccion vertical π en la llave:

$$M\pi = -\pi.\,(L-x)$$
$$M'\pi = -\pi.\,(L-x')$$

Por consiguiente:

$$M = \frac{p\,(L-x)^2}{2} - q.\,(d+h) - \pi\,(L-x)$$

$$M' = \frac{p\,(L-x')^2}{2} - q.\,d. - \pi\,(L-x')$$

Reemplazando estos valores en (12), (13) i (14) i admitiendo, para simplificar, que las secciones Ω i Ω' sean iguales, hipótesis no mui distante de la realidad, se tiene:

$$\Delta x_1 = \frac{p}{2\,E.\,\Omega}\int_A^D \frac{(L-x)^2}{h}\,dx - \frac{q.\,d.}{E\,\Omega}\int_A^D \frac{dx}{h} - \frac{q}{E.\Omega}\int_A^D dx - \frac{\pi}{E.\Omega}\int_A^D \frac{L-x}{h}\,dx \quad (15)$$

$$-\Delta y_1 = \frac{p}{2.\,E.\,\Omega}\left[\int_A^D \frac{(L-x)^3}{h^2}dx + \int_A^D \frac{(L-x')^3}{h'^2}ds\right]$$

$$-\frac{q\,d}{E.\Omega}\left[\int_A^D \frac{L-x}{h^2}dx + \int_A^D \frac{L-x'}{h'^2}ds.\right]$$

$$-\frac{q}{E.\Omega}\int_A^D \frac{(L-x)}{h}dx - \frac{\pi}{E.\,\Omega}\left[\int_A^D \frac{(L-x)^2}{h^2}dx. + \int_A^D \frac{(L-x')^2}{h'^2}ds.\right] \quad (16)$$

$$\alpha_1 = \frac{p}{2.\,E.\,\Omega}\left[\int_A^D \frac{(L-x)^2}{h^2}dx + \int_A^D \frac{(L-x')^2}{h'^2}ds\right] - \frac{q\,d}{E\,\Omega}\left[\int_A^D \frac{dx}{h^2} + \int_A^D \frac{ds.}{h'^2}\right]$$

$$-\frac{q}{E.\Omega}\int_A^D \frac{dx}{h}. - \frac{\pi}{E.\Omega}\left[\int_A^D \frac{L-x}{h^2}dx + \int_A^D \frac{L-x'}{h'^2}ds\right] \quad (17)$$

Determinacion de $\Delta x'_1$, $\Delta y'_1$ i α'_1

Las fuerzas que solicitan el medio arco son únicamente q i π; por consiguiente, para calcular aquellas cantidades, nos bastará hacer en las ecuaciones (15), (16) i (17) $p=0$ i cambiar de signo a los términos en que entra π, pues la nueva direccion del eje de las x deja inalterable el de los que contienen a q:

$$\Delta x'_1 = -\frac{q\,d}{E.\,\Omega}\int_I^D \frac{dx}{h} - \frac{q}{E.\,\Omega}\int_I^D dx + \frac{\pi}{E.\,\Omega}\int_I^D \frac{L-x}{h}dx \tag{18}$$

$$-\Delta y'_1 = -\frac{q\,d}{E.\,\Omega}\left[\int_I^D \frac{L-x}{h^2}dx + \int_I^D \frac{L-x'}{h'^2}ds\right] - \frac{q}{E.\,\Omega}\int_I^D \frac{L-x}{h}dx$$

$$+\frac{\pi}{E.\,\Omega}\left[\int_I^D \frac{(L-x)^2}{h^2}dx + \int_I^D \frac{(L-x')^2}{h'^2}ds\right] \tag{19}$$

$$\alpha'_1 = -\frac{q.\,d}{E.\,\Omega}\left[\int_I^D \frac{dx}{h^2} + \int_I^D \frac{ds}{h'^2}\right]$$

$$-\frac{q}{E.\,\Omega}\int_I^D \frac{dx}{h} + \frac{\pi}{E.\,\Omega}\left[\int_I^D \frac{L-x}{h^2}dx + \int_I^D \frac{L-x'}{h'^2}ds\right] \tag{20}$$

Resolucion de las ecuaciones (a), (b) i (c)

Sustituyendo en ellas a $\Delta\, x_1$, $\Delta\, y_1$, etc., por los valores encontrados; notando que, por efecto de la simetría del arco con relacion al plano vertical medio D C, las integrales de A′ a D son iguales a las de I a D, i simplificando, se tiene:

$$\frac{p}{2}\int_A^D \frac{(L-x)^2}{h}dx = 2\,qd.\int_A^D \frac{dx}{h} + 2q\int_A^D dx \tag{21}$$

$$\frac{p}{2}\left[\int_A^D \frac{(L-x)^3}{h^2}dx + \int_A^D \frac{(L-x')^3}{h'^2}ds\right] = 2\pi\left[\int_A^D \frac{(L-x)^2}{h^2}dx + \int_A^D \frac{(L-x')^2}{h'^2}ds\right]$$

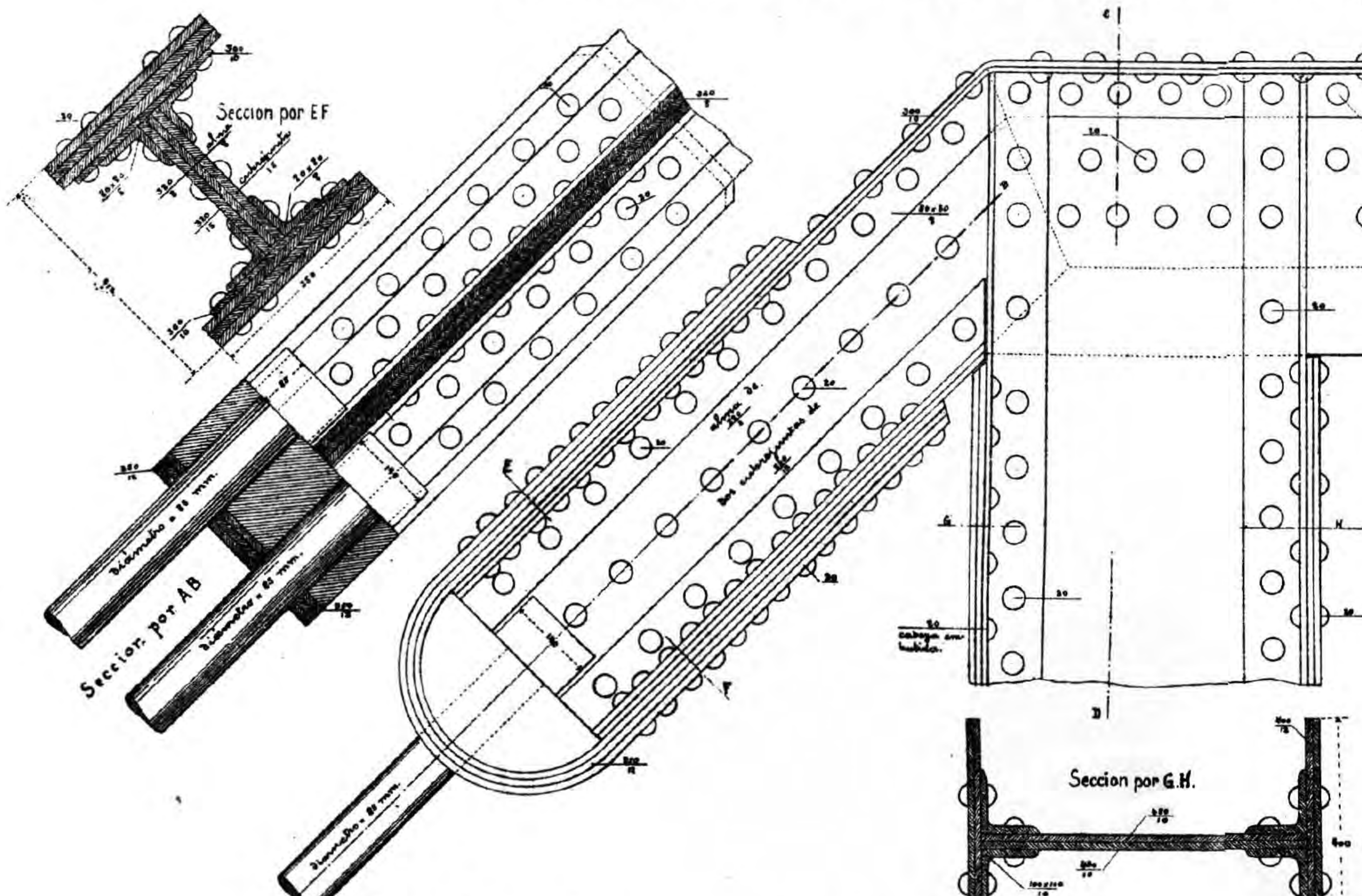
$$\frac{p}{2}\left[\int_A^D \frac{(L-x)^2}{h^2}dx + \int_A^D \frac{(L-x')^2}{h'^2}ds\right] \tag{22}$$

$$= 2\,q.d\left[\int_A^D \frac{dx}{h^2} + \int_A^D \frac{ds}{h'^2}\right] + 2q\int_A^D \frac{dx}{h} \tag{23}$$

Obtenemos así un sistema determinado de tres ecuaciones con tres incógnitas q, π i d.

b) *La sobrecarga se estiende sobre toda la lonjitud del tramo*

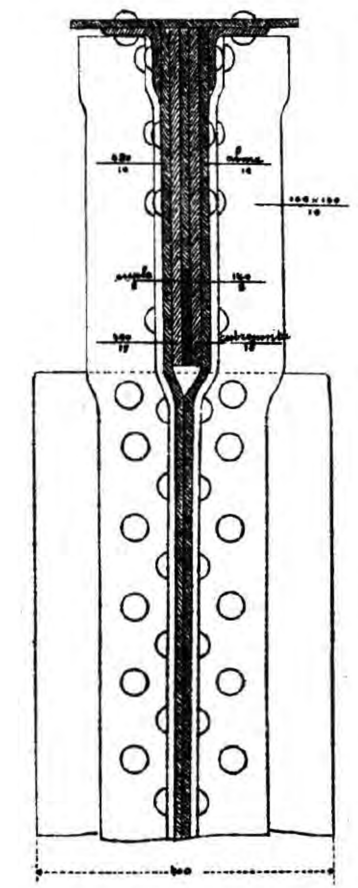
Es evidente que, para este estado de solicitacion, los valores de q i π se obtendrán sumando aljebráicamente los que corresponden al caso anterior. El valor de d permanece constante.



Empotramiento (extremo superior del arco).

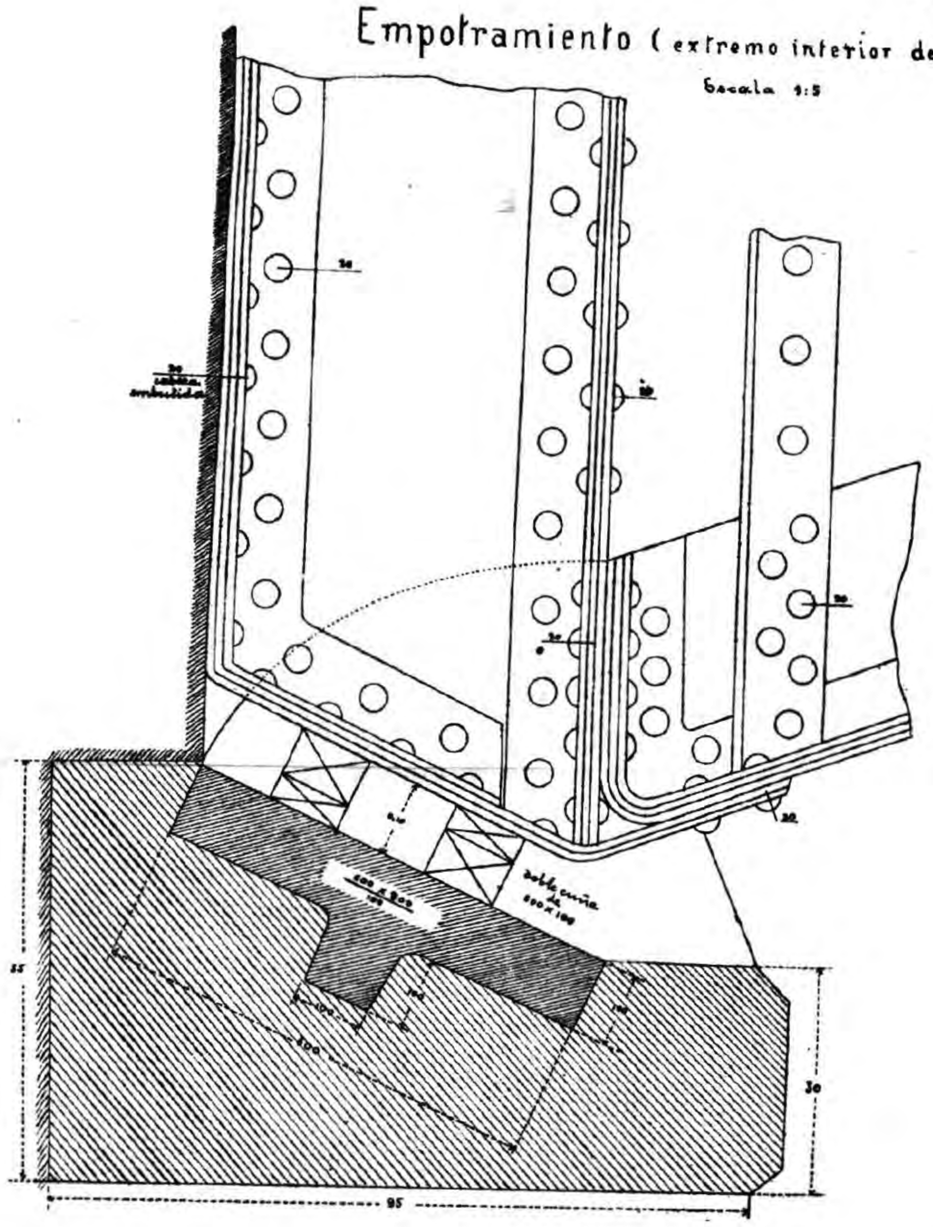
Escala 1:5

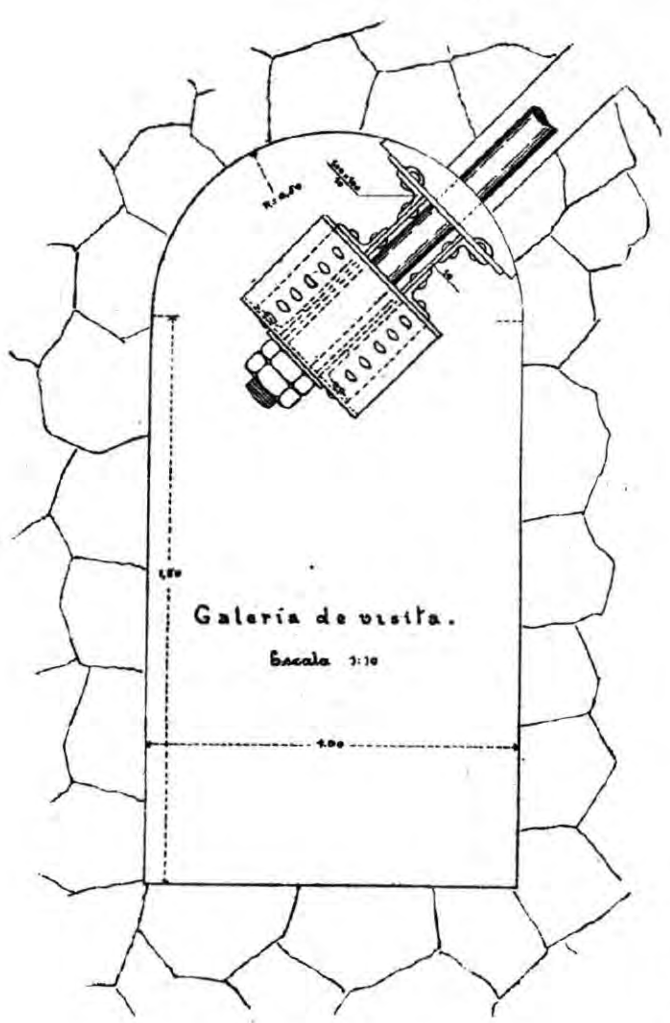
Seccion por CD



Empotramiento (extremo inferior del arco).

Escala 1:5

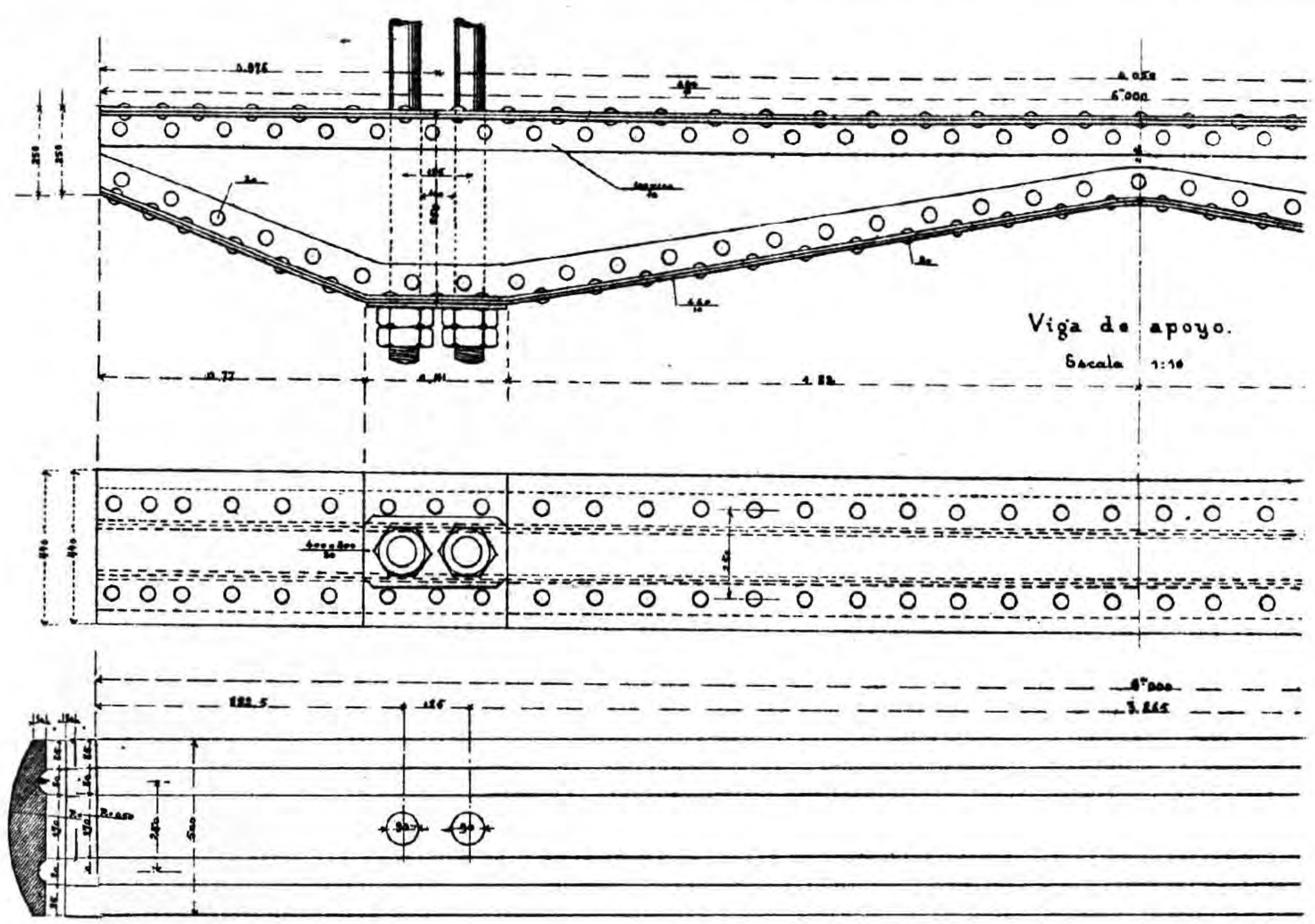




Galeria de visita.

Escala 1:10

Empotramiento (extremo inferior del tirante).



Viga de apoyo.

Escala 1:10

Plancha de fundicion.

Escala 1:10