ESTUDIOS ANALÍTICOS

sobre la disposicion mas económica de armaduras articuladas i estáticamente determinadas.

El presente trabajo debe considerarse como continuacion de dos artículos anteriores, publicados por el mismo autor, bajo títulos análogos en los números de estos Anales, correspondientes a los meses de Setiembre del 1895 i Febrero del 1896.

Estos estudios deben aparecer próximamente en la *Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure* (Revista Periódica de los Injenieros Alemanes). La redaccion de esta importante revista los habia sometido al juicio del eminente profesor de injeniería, señor G. Barkenhausen, en Hanóver, de competencia reconocida en materia de construcciones de fierro. Este injeniero, al mismo tiempo de aducir algunas consideraciones que, en el estado actual del desarrollo de mis teorías, restrinjen el alcance práctico de sus resultados, llega a la conclusion de que mis investigaciones ofrecen *un material valioso para la enseñanza de Matemáticas en las Escuelas técnicas.*

Sistema de anotaciones: En lo sucesivo designaremos las diferentes piezas (barras prismáticas) de una armadura articulada con los números 1, 2, 3......, las intensidades de los esfuerzos axiales que las afectan con I, II, III......, sus lonjitudes entre nudo i nudo con l_1 l_2 l_3......, i sus volúmenes con V_1 V_2 V_3....,

Los coeficientes de seguridad sean n i m, segun que el esfuerzo respectivo sea traccion o compresion, de suerte que en

el primer caso $V = n\, l\, S$, i en segundo $V = m\, l\, S$, donde S es la intensidad del esfuerzo respectivo (véanse los artículos an-
El último caso contemplado llevaba el número V.
teriores.

VI. *Una pared vertical sostiene enlos puntos M i N* (M N = a) *dos palancas M Z i N Z, destinadas a soportar un peso P suspendido por una cuerda a la distancia* d *de la pared. Averiguar a qué altura debe elejirse el punto (articulado) de amarra Z, para que la construccion de las palancas exija un mínimun de material?*

Solucion: La figura 6_b representa el diagrama mui sencillo que manifiesta los esfuerzos I i II, enjendrados en las palancas 1 i 2, i la traslacion de las flechas hace ver que I es traccion i II compresion.

De la semejanza de los triángulos M N Z i *abc* fluyen las siguientes proporciones:

$$I : l_1 = P : a \quad i \quad II : l_2 = P : a;$$

por consiguiente:

$$(1)\ldots\ldots\ldots \qquad I = \frac{P l_1}{a} \qquad II = \frac{P l_2}{a} \qquad \ldots\ldots\ldots(2)$$

Segun lo arriba establecido tenemos

$$V_1 = n\, I\, l_1 \quad i \quad V_2 = m\, II\, l_2$$

Introduciendo los valores de las ecuaciones (1) i (2) resulta:

$$V_1 = \frac{n\,P}{a}\, l_1 \quad , \quad V_2 = \frac{m\,P}{a}\, l_2$$

Designando con *X* la distancia vertical del punto de amarra Z *encima* de la articulacion superior *N*, se deduce:

$$l^2 = X^2 + d^2 \quad ; \quad l_2^2 = (X + a)^2 + d^2$$

Con estos valores obtenemos para el volúmen total

$$V = V_1 + V_2$$

de la construccion, la siguiente espresion analítica:

$$(3)\ldots\ldots\quad V = \frac{P}{a}\left[n\,(x^2 + d^2) + m\,[(x+a)^2 + d^2]\right]$$

Para obtener los valores límites de la espresion debemos considerar la funcion:

$$y = n\,(x^2 + d^2) + m\,(x^2 + 2\,a\,x + a^2 + d^2),\ \text{o sea}$$

$$y = (m+n)\,(x^2 + d^2) + d\,m\,a\,x + m\,a^2.$$

Diferenciando resulta:

$$y' = 2\,(m+n)\,x + 2\,m\,a = 0,\ \text{i luego}$$

$$x = -\frac{m}{m+n}\,a.$$

La segunda deribada es $y'' = +2\,(m+n)$, lo que nos dice que el valor encontrado para X enjendra el *valor mínimo* del volúmen total. El signo negativo de X indica que el punto de amarra Z debe elejirse *debajo* del punto N, pero siempre estará situadc entre M i N, pues la fraccion $\frac{m}{m+n}$ es siempre menor de *1*.

Cuando los dos coeficientes m i n son iguales, resulta $X = -\frac{a}{2}$, es decir en este caso la situacion mas favorable del punto Z será en el medio entre M i N. Es de notar que la distancia X es totalmente independiente de la distancia d.

Con relacion a la misma figura 6. nos proponemos todavia averiguar:

¿Cuál es, siendo invariable la posicion de la palanca 1, la situacion mas favorable de la barra 2?

Solucion: En este caso x es constante$=p$ i a variable$=z$, luego en virtud de la ecuacion (3):

$$V = \frac{P}{z}\left[n(p^2+d^2) + m(p^2+2\,p\,z+z^2+d^2)\right]; \text{ por consiguiente:}$$

$$(4)\ldots\ldots\ldots \quad \frac{V}{P} = y = \frac{(m+n)(p^2+d^2)}{z} + 2\,m\,p + m\,z.$$

Diferenciando segun la variable z se sigue:

$$y' = -\frac{(m+n)\,l_1^2}{z^2} + m = 0 \text{ i finalmente}$$

$$z = \pm\sqrt{\frac{m+n}{m}}\,l_1$$

Considerando el valor positivo de z, es decir *M debajo de N*, la segunda derivada $y'' = +\frac{(2\,m+n)}{z^3}\,l_1^2$ espositiva, es decir en este caso se produce un *valor mínimo* del volúmen total de la construccion.

Pero si se quiere elejir el punto *M encima del punto fijo N*, es decir, z negativo, es evidente que la palanca 1 es comprimida i 2 estirada. Tenemos en consecuencia:

$$V_1 = \frac{m\,P}{z}\,l_1^2; \qquad V_2 = \frac{n\,P}{z}\,l_2^2, \text{ es decir se}$$

deben cambiar los factores m i n; pero al mismo tiempo hai que alterar el signo aljebráico de p i volver a considerar a z como positivo, de suerte que en este caso la distancia $z = \sqrt{\frac{m+n}{n}}\,l_1$ (encima de N) enjendra un volúmen total *mínimo*. Se vé que en ámbos casos, la distancia z es independiente de la *inclinacion* de la palanca fija $N\,z$.

Con $m=n$ sigue en ámbos casos $z=l_1\sqrt{2}$

En el primero de los casos trataados, introduciendo el valor

$z=\sqrt{\frac{m+n}{m}}l_1$ en la ecuacion (4), resulta:

$$\frac{\text{mín. } V}{P}=\sqrt{m(m+n)}l_1+2\,m\,p+\sqrt{m(m+n)}\,l_1, \text{ es decir}$$

$$5)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{mín.} V=2\,P\left[\sqrt{m\,(m+n)}\,l_1+m\,p\right]$$

Cambiando los factores m i n i alterando simultáneamente el signo de p, se obtiene el valor mínimo correspondiente al segundo caso:

$$(6)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{mn.} V=2\,P\left[\sqrt{n(m+n)}-n\,p\right]$$

Cuando la palanca fija va inclinada hácia abajo, es decir, p negativo, disminuye el primer valor mínimo i crece el segundo.

Con $m=n$ el primer valor es

$$\text{mín. } V=2m\,P\,(l_1\sqrt{2}+p) \text{ i el}$$

$$\text{segundo mín.} V=2\,n\,P\,(l_1\sqrt{2}-p),$$

es decir en este caso conviene apoyar la palanca fija desde abajo o desde arriba, segun vaya inclinada hácia arriba o hácia abajo. Pero, cuando los coeficientes m i n tienen valores numéricos mui diferentes (como sucede de ordinario), entónces para decidir esta cuestion es menester comparar los valores numéricos de (5) i (6).

Cuando la barra fija es horizontal, es decir p=o, se obtiene

en el primer caso: mín. $V = 2\,P \sqrt{m\,(m+n)}\;l,$

i en el segundo; mín. $V = 2\;P \sqrt{n\,(m+n)}\;l,$

Por consiguiente, segun en este caso *n* sea mayor o menor que *m*, será preferible disponer el apoyo desde abajo o desde arriba.

VII

La figura 7_a representa una armadura articulada estable únicamente para el caso de una carga simétrica del borde superior *AB*. La viga inclinada está dividida en tres campos iguales $AC = CD = DB = l$, independientes entre sí i unidos por articulaciones, i las barras 3 i 6 son iguales i paralelas.—La carga del borde superior sea $= 2\,p$ ton. por metro corriente, luego la carga total $= 6\,pl$. El sistema de las fuerzas esteriores, distribuidas sobre los nudos superiores, está marcado en la figura.

La figura 7_b representa el diagrama de Cremona (*) correspondiente a este sistema.

Por traslacion de las flechas se infiere, que los tres miembros del borde superior, así como las piezas paralelas *CE* i *DF* son comprimidas, miéntras que las tres barras del borde inferior sufren traccion.

Nos proponemos el siguiente problema:

¿Cuál es, bajo el punto de vista económico, la lonjitud X mas favorable para las palancas CE i DF?

(*) La interesante teoría de los Diagramas de Cremona, de importancia trascendental en la práctica, se encuentra espuesta con la mayor claridad en la obra: *Tratado de Estática gráfica*, por Julio Pflüger, Santiago.

Solucion: Como línea ausiliar trazamos por E la vertical EG, entónces los triángulos *EGA* i *abc* son semejantes i se deducen las proporciones:

$$bc : AG = ab : EG, \text{ y } ac : AE = ab : EG; \text{ o'}$$

$$I : (l - CG) = 2pl : EG, \text{ y } II : l_2 = 2pl : EG;$$

por consiguiente: $I = 2pl \dfrac{l - CG}{EG}$, y $II = 2pl \dfrac{l_2}{EG}$

Del triángulo *ECG* se sigue imediatamente:

$$CG = \frac{X \sin (r-t)}{\sin r}, \text{ y } EG = \frac{X \sin t}{\sin r}.$$

Introduciendo estos valores resulta:

$$(1)\ldots\ldots V_1 = mI\, l = \frac{2m\, pl^3 \sin r}{X \sin t} - \frac{2m\, pl^2 \sin (r-t)}{\sin t}.$$

$$V_2 = nII\, l_2 = \frac{2np\, ll_2^2 \sin r}{X \sin t}.$$

Del triángulo *ACE* se deduce:

$$l_2^2 = X^2 - 2l\, X \cos t + l^2;$$

luego:

$$(2)\ldots\ldots V_2 = \frac{2n\, pl\, X \sin r}{\sin t} - 4n\, pl^2 \sin r \cot t + \frac{2n\, pl^3 \sin r}{X \sin t}$$

De la semejanza de los triángulos ACE i *adc* se sigue:

$$cd : CE = ac : AE, \text{ o sea } III : X = II : l_2$$

por consiguiente:

$$III = II \frac{X}{l_2} = \frac{2pl \sin r}{\sin t},$$

i como III es una compresion:

$$(3)\ldots\ldots \qquad V_3 = m\ III\ X = \frac{2m\ pl\ X \sin r}{\sin t}$$

Así mismo se verifica la proporcion:

$$ad : AC = ac : AE, \text{ o sea } IV : l = II : l_2,$$

luego:

$$IV = II \frac{l}{l_2} = \frac{2pl^2 \sin r}{X \sin t}$$

$$(4\ldots\ldots \qquad V_4 = m\ IV\ l = \frac{2m\ pl^3 \sin r}{X \sin t}.$$

El esfuerzo V es igual a IV, solamente que es traccion en vez de compresion, por consiguiente:

$$(5)\ldots\ldots \qquad V_5 = \frac{2n\ pl^3 \sin r}{X \sin t}.$$

En la figura 7_b se vé que $VI = dg = cd = III$ (ámbos esfuerzos son compresiones); de ahí:

$$(6)\ldots\ldots \qquad V_6 = \frac{2m\ pl\ X \sin r}{\sin t}.$$

La misma figura patentiza que:

$$fg + bc = 2\ ad,$$

o sea:

$$VII = I = 2\ IV,$$

luego:

$$VII = 2\ IV - I = \frac{2pl \sin r}{X \sin t} + \frac{2pl \sin (r-t)}{\sin t},$$

por consiguiente: como el esfuerzo VII es compresion:

$$(7)\ldots\ldots V_7 = m \text{ VII } l = \frac{2m\,pl^3 \sin r}{X \sin t} + \frac{2m\,pl^2 \sin(r-t)}{\sin t}$$

De la semejanza de los triángulos *BDF* i *adg* fluye la proporcion.

$$ag : BF = ad : BD, \text{ o sea VIII} : l_8 = V : l;$$

luego:

$$\text{VIII} = V \frac{l_8}{l} = \frac{2\,pl \sin r}{X \sin t} l_8,$$

por consiguiente:

$$V_8 = n \text{ VIII } l_8 = \frac{2n\,pl \sin r}{X \sin t} l_8^2.$$

Del triángulo *BDF* se deduce que:

$$l_8^2 = X^2 + 2l\,X \cos t + l^2;$$

de ahí:

$$(8) \quad V_8 = \frac{2n\,pl\,X \sin r}{\sin t} = 4n\,pl^2 \sin r \operatorname{cotg} t = \frac{2n\,pl^3 \sin r}{X \sin t}$$

Sumando las ecuaciones (1), (2), (3).. (8) se destruyen dos pares de miembros i se obtiene finalmente para el volúmen total *V* del material exijible la espresion:

$$V = \frac{2(m+n)\,pl \sin r}{\sin t} \left[\frac{3\,l^2}{X} + 2\,X\right]$$

Para determinar su valor mínimo, hai que considerar la funcion:

$$y = \frac{3\,l^2}{X} + 2\,X.$$

Diferenciando resulta:

$$y' = -\frac{3l^2}{X^2} + 2 = 0, \qquad \text{luego } X^2 = \frac{3l^2}{2} \text{ i}$$

i

$$X = \frac{1}{2} l \sqrt{6}.$$

La segunda derivada es positiva, luego este valor de X produce un *valor mínimo* del volúmen total; es fácil de calcular i tambien admite una construccion jeómetrica sencilla.

Introduciendo este valor de X, se obtiene:

$$\text{mín } V = 4 \ (m + n) \frac{pl \sin r}{\sin t} \sqrt{6} l$$

Esta espresion manifiesta que conviene colocar las barras paralelas $CE = DF = \frac{l}{2} \sqrt{6}$ perpendicularmente a la viga A B.

Digna de llamar la atencion es la circunstancia de que la lonjitud X es independiente de los coeficientes de seguridad, es decir, de la naturaleza o especie del material empleado.

VIII. En la armadura articulada fig. 8_a, la viga horizontal *A B* está dividida en cuatro campos iguales, cada uno $= l$ metros. La carga como en el ejemplo anterior, luego carga total $= 8\,pl$, de suerte que en cada uno de los apoyos *A* i *B* queda una fuerza esterior $= 3\,pl$, dirijida verticalmente hácia arriba.

La figura 8_b contiene el plano de fuerzas correspondientes a nuestro sistema. La traslacion de las flechas hace ver, que los 4 miembros del borde superior, así como las tres piezas verticales son comprimidas, todas las demas barras estiradas. A causa de la simetria de la construccion i carga con respecto a la barra media *CH*, solamente se necesitaba trazar el diagrama correspondiente a la mitad izquierda (fig. 8_b).

Como variable consideramos el ángulo z, que los bordes inferiores forman con la horizontal.

Nos preguntamos:

¿A qué valor del ángulo z corresponde un consumo mínimo de material?

Solucion: De la figura 8_b se deduce inmediatamente:

$bc = l = 3$ pl. cotj. z; por consiguiente:

(1)...... $V_1 = 3$ m pl² cotj. z, $ac = II = \frac{3 \text{ pl}}{\sin z}$, luego

$V_2 \frac{3 \text{ n pll}_2}{\sin z}$; pero como $l_2 = \frac{l}{\cos z}$ se sigue:

(2)...... $\frac{3 \text{ n pl}^2}{\sin z \cos z}$ Ademas se tiene: $III = cf = bd = 2$ pl, luego $V_3 = 2$ m pll_3, i como $l_3 = l \tan j\,\delta$, resulta

(3)...... $V_3 = 2$ m p l² tanj z. $IV = df = bt = I = 3$ pl cotj. z, luego (4)...... $V_4 = 3$ m pl² cotj. z.

Del triángulo isósceles fgc, donde $fg = V$, se deduce la proporcion: $V : III = \cos z : \sin 2z$, es decir

$V = \frac{III}{2 \sin z} = \frac{2 \text{ pl}}{2 \sin z} = \frac{\text{pl}}{\sin z}$, i $V_5 = \frac{\text{npll}_5}{\sin z}$; pero como

$l_5 = \frac{l}{\cos z}$, resulta (5)...... $V_5 = \frac{\text{n pl}^2}{\sin z \text{ con } z}$ Ademas tenemos

$VI = ag = \frac{2}{3}$ $ac = \frac{2\text{pl}}{\sin z}$; luego: $V_6 = \frac{2\text{npll}_6;}{\sin z}$ i como

$b_6 = l_2 = \frac{l}{\cos z}$ finalmente: (6)...... $V_6 = \frac{2\text{npl}^2}{\sin z \cos z}$

Es fácil ver que: $VII = gh = 2cf = 2III = 4$pl, luego $V_7 = 4$mpll$_7$, i como $l_7 = 2l$ tanj. z, (7)...... se tiene $V = 8$mpl² tanj z.

En el volúmen total V entran dobles todas las piezas con escepcion de la barra 7; por consiguiente obtenemos:

$$V = 6 \text{ mpl}^2 \text{cotj } z + \frac{6\text{npl}^2}{\sin z \cos z} + 4 \text{mpl tanj } z + 6\text{npl}^2 \text{ cotj. } z$$

$$+\frac{2npl^2}{\sin z \cos z}+\frac{4npl^2}{\sin z \cos z}+8mpl^2 \tan j\ z.$$

O sea $V = 12\ mpl^2\ (\tan j\ z + \cot j\ z) + \dfrac{12\ npl^2}{\sin z \cos z}$

Pero se tiene en jeneral: $\dfrac{1}{\sin z\ \cos z} = \tan j\ z + \cot j\ z$;

Por consiguiente: $V = \dfrac{12\ pl^2 (m+n)}{\sin z \cos z} = \dfrac{24\ (m+n)\ pl^2}{\sin 2z}$

Esta última espresion alcanza su *valor mínimo,* cuando *sen* $2z = 1$, luego $2z = 90^\circ$ i $Z = 45^\circ$ i $CH = 2l$.

Con esto queda resuelto el problema.

De nuevo, la disposicion mas favorable es totalmente independiente de la especie del material empleado.

IX. En la armadura fig. 9_a los nudos del borde inferior están situados sobre una *parábola*; entónces es $DF = EG = \frac{3}{4} CH$. La carga contínua i uniforme $= 2p$ por m. c.

El diagrama fig. 9_b se ha trazado únicamente para la mitad izquierda del sistema. No es difícil comprender (por razones jeométricas) que el esfuerzo que afecta la barra 5 es igual cero. Las piezas del borde inferior sufren traccion; todas las demas son comprimidas.

Tratamos de averiguar:

¿Cuál es la lonjitud X económicamente mas favorable para la pieza media vertical CH?

Solucion: La semejanza de los triángulos *FDA* i *abc* da la proporcion: $bc : AD = ab : DF$, o $I : l = 3\ pl : \frac{3}{4} X$; por consiguiente: $I = \dfrac{4pl^2}{x}$, i (I)...... $V_1 = \dfrac{4mpl^3}{X}$; ademas $ac : AF = ab : DF$, ó $II : l_2 = 3pl : \frac{3}{4}\ X$; luego $II = \dfrac{4pll_2}{x}$ i $V_2 = 4\ \dfrac{npll_2^2}{X}$; pero

$AF^2 = DF^2 = BD^2$, o sea $l_2^2 = \left(\frac{3}{4}X\right)^2 + l^2 = \frac{9}{16}X^2 + l^2$ por consiguiente:

(2)...... $V_2 = \frac{9}{4} nplX + \frac{4npl^3}{X}$ $III = of = bd = 2pl$, luego $V_3 = 2\ mpll_3$, i como $l_3 = \frac{3}{4}X$ sigue (3)......$V_3 = \frac{3}{4}\ mplX$.

Ademas $IV = df = bc = I$, luego

(4)...... $V_4 = V_1 = \frac{4mpl^3}{X}$ (5)...... $V_5 = O$

Si en fig. 9_a se traza por F la horizontal FT, los triángulos) FTH i fda son semejantes, i se deduce la proporcion:

$af : FH = ad : HT$, sea $VI : l_6 = pl : \frac{1}{4}X$; luego $VI = \frac{4pll_6}{X}$, i $V_6 = \frac{4npll_6^2}{X}$; pero $FH^2 = FT^2 + HT^2$, o $l_6^2 = (\frac{1}{4}X)^2 + l^2 = \frac{1}{16}X^2 + l^2$ por consiguiente

6)...... $V_6 = \frac{1}{4}\ npl\ X + \frac{4npl^3}{X}$

Es fácil ver que $VII = fg = 2\ a\ d = 2\ p\ l$; luego $V_7 = 2\ mpll_7$, o sea (7) ... $V_7 = 2m\ plX$.

Con escepcion de la pieza media CH, todas las demas barras aparecen dos veces; por consiguiente obtenemos para el volúmen total V la espresion:

$$V = \frac{8\ mpl^3}{X} + \frac{9}{2} nplX + \frac{8\ npl^3}{X} + 3\ mpl\,X + \frac{8\ mpl^3}{X} + \frac{1}{2}\ nplX + \frac{8npl^3}{X} + 2\ mplX.$$

Por consiguiente: $V = \frac{16\ pl^3}{X}(m+n) + 5\ plx\ (m+n)$,

i finalmente $V = (m+n)\,pl\left[\frac{16\ l^2}{X} + 5X\right]$.

Diferenciando la funcion $y = \frac{16\, l_2}{X} + 5X$, resulta:

$$y' = -\frac{16\, l^2}{X^2} + 5, \text{ o sea } 5\, X^2 = 16\, l^2 \quad X = \frac{4\, l}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5} \sqrt{5}\, l.$$

Este valor produce un *mínimum* del volúmen total i puede construirse jeométricamente.

La lonjitud encontrada para la disposicion mas económica de la armadura es nuevamente independiente de los coeficientes de seguridad.

X. La fig. 10.ª representa una armadura con bordes paralelos (horizontales). La carga que se supone como en los ejemplos anteriores afecta al borde inferior=4 l. El sistema de las fuerzas esteriores está marcado en la figura. Conforme a las reglarespectivas se ha construido en fig. 10b el diagrama de Cremos na correspondiente, que manifiesta jeométricamente los esfuerzos producidos en cada una de las 13 barras de que se compone la construccion. Sufren compresion las piezas del borde superior i la barra 5; todas las demas partes componentes están sujetas a traccion.

Se trata de averiguar:

¿Qué altura vertical se debe dar a esta armadura para conseguir la mayor economía posible en el consumo de material?

Solucion: Como incógnita (variable) consideramos el ángulo *z*, que las barras estremas *A C* i *BE* del borde superior forman con el borde inferior, horizontal.

El triángulo de fuerzas *abc* da $bc = I = \frac{ab}{\text{sen } z}$, luego,

$$V_1 = \frac{3\text{ mpll}_1}{\text{sen } z} \quad \text{i como} \quad l_1 = AC = \frac{AF}{\cos z} = \frac{l}{\cos z}, \text{ sigue}$$

$$V_1 = \frac{3\text{mpl}^2}{\text{sen } z_1 \cos z} \text{ o sea}$$

(1)......... $V_1 = 3\text{mpl}^2 \text{ tanj. } z + 3\text{ mpl}^2 \text{cot. } z.$ Ademas $ac = II = ab \text{ cot. } z. = 3pl \text{ cot. } z$; luego

(2)....... $V_2 = 3\ npl^2 \cot. z$. III=cd=ab=3 pl; luego $V_3 = 3\ npll_3$ i como $l_3 = FC = AF\ \tan j.\ z = l\ \tan j\ z$, sigue

(3)..... $V_3 = 3\ npl^2 \tan j\ z$. IV = bd = II = 3 pl cot. z, luego

(4)...... $V_4 = 3\ mpl^2 \cot z$.

Es fácil ver que $V = dg = \frac{pl}{\text{sen } z}$, luego $V_5 = \frac{mpl_5}{\text{sen } z}$, i como $l_5 = l_1 = \frac{1}{\cos. z}$ resulta $V_5 = \frac{mpl^2}{\text{sen. } z. \cos z}$, o sea

(5)...... $V_5 = mpl^2 \tan j\ z + mpl^2 \cot z$.

VI=fg=bh=bd+dh=II+pl cotj z=4 pl cotj z; por consiguiente.

(6)....... $V_6 = 4n\ pl^2 \cot j\ z$. VII=gh=bf=pl, luego: $V_7 = npll_7$, i como $l_7 = l\ \tan j\ z$

(7)...... $V_7 = npl^2 \tan j\ z$. VIII=bh=fg=VI=4pl cotj z; de ahí:

(8)...... $V_8 = 4mpl^2 \cot j\ z$.

IX=hk=lg=V= $\frac{pl}{\text{sen } z}$, luego: $V_9 = \frac{n\ pll_9}{\text{sen } z}$,

i como: $l_9 = l_1 = \frac{1}{\cos z}$, resulta: $V_9 = \frac{npl^2}{\text{sen } z \cos z}$, o sea:

(9)....... $V_9 = n\,pl^2 \tan j\ z + npl^2 \cot j\ z$. X=ik=ac=II, luego: $V_{10} = V_2$ es decir

(10)..... $V_{10} = 3\ npl^2 \cot j\ z$. XI=Kl=im=2 pl, luego: $V_{11} = 2\ npll_{11}$, o sea

(11)..... $V_{11} = 2\ npl^2 \tan j\ z$. XII=lm=ac=II, luego $V_{12} = V_2$, o sea

(12)..... $V_{12} = 3\ npl^2 \cot j\ z$. XIII=bl=bc=I, luego $V_{13} = V_1$, o sea

(13)..... $V_{13} = 3\,mpl^2 \tan j\ z + 3mpl^2 \cot j\ z$.

Sumando todos los volúmenes parciales se obtiene para el volúmen total V la siguiente espresion analítica:

$V = pl^2\ [7m \tan j\ z + 7\,n \tan j\ z + 14m \cot j\ z + 14\ n \cot j\ z]$ o sea

$V = 7\ (m+n)\ pl^2\ [\tan j\ z + 2 \cot j\ z]$

Diferenciando la funcion $y = \tan j\ z + 2 \cot j\ z$, resulta

$$y' = \frac{1}{\cos^2 z} - \frac{2}{\sin^2 z} = o,$$

o sea $\sin^2 z = 2 \cos^2 z$, o $tj^2 z = 2$, o $tg\, z = \sqrt{2}$

Si ahora considearmos como incógnita la altura de la armadura $GD = X$, se tiene: $\frac{X}{l} \tan j\ z = \sqrt{2}$; por consiguiente $X = l\sqrt{2}$

Esta distancia es mui fácil de construir i produce un *valor mínimo* del volúmen total V, es decir del material que entra en la contruccion.

En el último caso tratado, atendiendo a la forma no totalmente simétrica de la armadura, resalta especialmente el hecho sorprendente de nuestras inquisiciones, a saber que la disposicion mas económica es la misma, de cualquier especie que sea el material que se emplee.

Es verdad que nuestros cálculos basan sobre suposiciones que prescinden de factores que en rigor deberian entrar; pero, con todo, somos de opinion que *nuestros resultados dan siempre una norma no despreciable para atender debida i racionalmente al importante factor de la economía, muchas veces lamentablemente descuidado por los hombres de profesion.*

El autor se reserva estender estos estudios a otras construcciones mas complicadas, i se apresurará a comunicar los re sultados en estos ANALES.

Esslingen (Alemania), Agosto de 1896.

JULIO PFLÜGER.

Anales del Instituto de Injenieros

Tabla de Figuras (Nº I)

Fig. 6ª

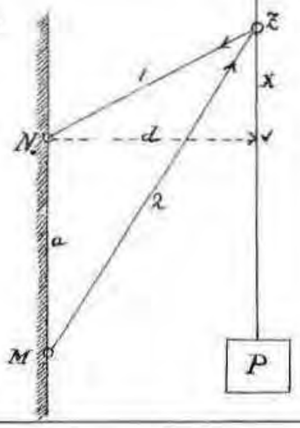


Fig. 6 b.

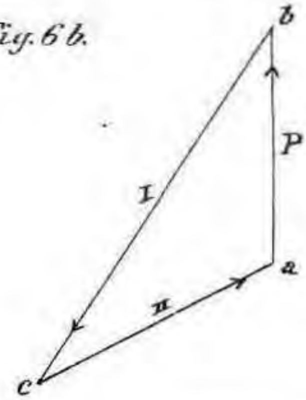


Fig. 7ª

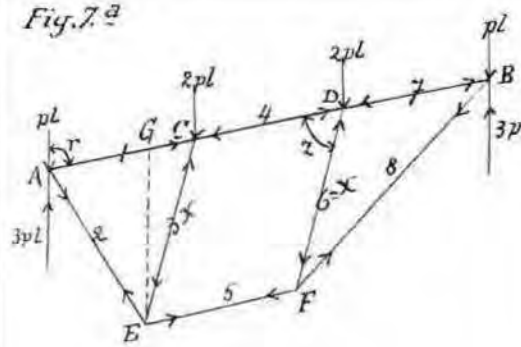


Fig. 7 b

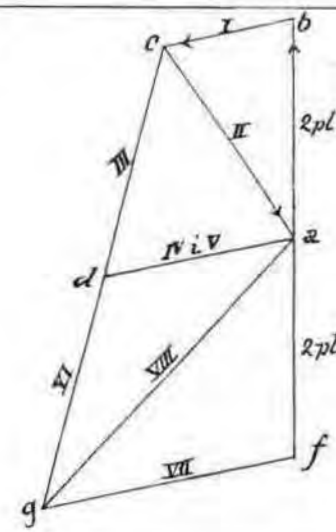


Fig. 8ª

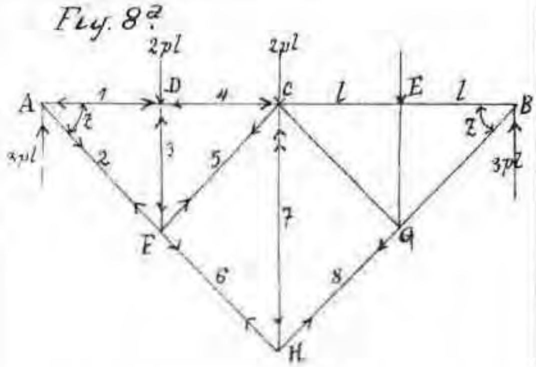
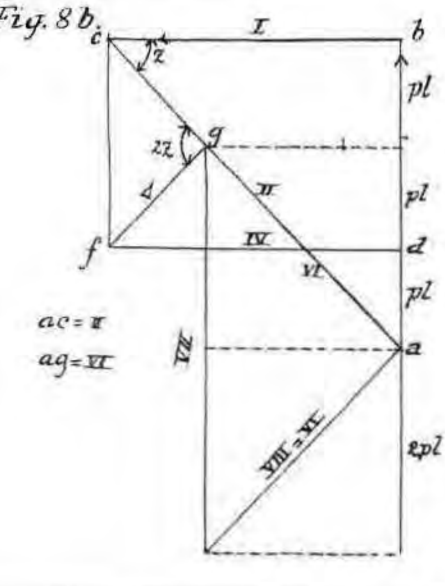


Fig. 8 b



Anales del Instituto de Injenieros

Tablas de Figuras (N.º II)

Fig 9.ª

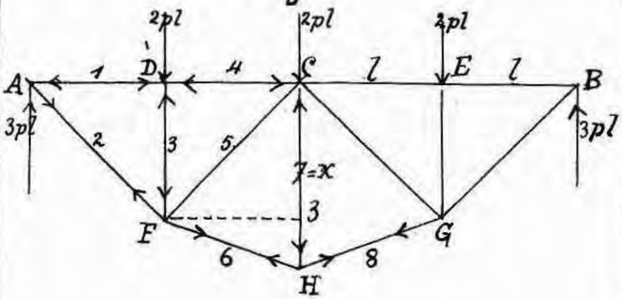


Fig 9.ᵇ

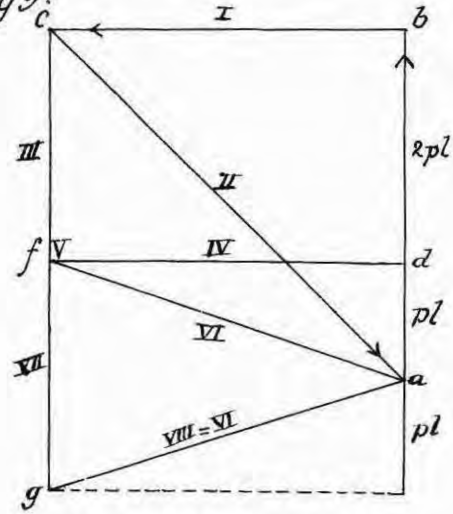


Fig. 10.ª

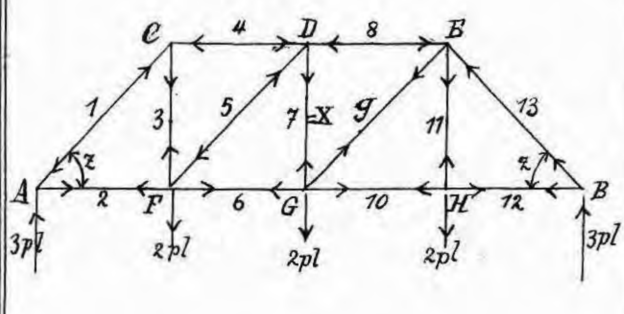


Fig 10.ᵇ